
Une approche multi-échelle de la rhéologie des suspensions concentrées de fibres

Steven Le Corre* — Pierre Dumont** — Laurent Orgéas***
Denis Favier***

* *Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, CNRS, Ecole Centrale de Nantes
1 rue de la Noë, BP 92101, F-44321 Nantes cedex.*

steven.le-corre@ec-nantes.fr

** *Laboratoire de Technologie des Composites et Polymères, EPFL,
Station 12, CH-1015 Lausanne.*

pierre.dumont@epfl.ch

*** *Laboratoire Sols-Solides-Structures, CNRS - Universités de Grenoble
BP 53, F-38041 Grenoble cedex.*

{laurent.orgeas,denis.favier}@hmg.inpg.fr

RÉSUMÉ. Ce travail présente une étude de la rhéologie de suspensions de fibres concentrées baignant dans une matrice de type fluide en loi puissance. La méthode d'homogénéisation des structures discrètes est utilisée pour passer de la physique à l'échelle des fibres au comportement macroscopique de la suspension. Cette approche permet de réaliser des expériences de « rhéométrie numérique » sur des volumes élémentaires représentatifs de la suspension afin d'en étudier les propriétés macroscopiques. Les simulations soulignent le rôle prépondérant de l'orientation et de la concentration en fibres, et du comportement de la matrice.

ABSTRACT. The rheology of concentrated fibers in power-law fluids is investigated by upscaling the physics at the fiber scale. The homogenisation method for discrete structures is used to carry out a quantitative study of concentrated fiber suspensions with planar fiber orientation, performing "numerical rheometry experiments" on representative elementary volumes of fiber suspensions. The simulations underline the significant influence of the fiber volume fraction and orientation, as well as the non-Newtonian properties of the suspending fluid on the resulting macroscopic rheological behaviour.

MOTS-CLÉS: suspensions de fibres concentrées, rhéologie, loi puissance, homogénéisation.

KEYWORDS: concentrated fiber suspensions, rheology, power-law, homogenisation.

1. Introduction

En raison de leurs bonnes propriétés mécaniques et physico-chimiques, les composites à matrice organique chargée de fibres tels que les « Sheet Molding Compounds » (SMC) ou les Thermoplastiques Renforcés Estampables (TRE) sont très utilisés par l'industrie automobile ou par l'industrie des composants électriques pour fabriquer des pièces semi-structurelles et légères. Leur mise en forme s'effectue par compression dans un moule. Cette étape, où les SMC ainsi que les TRE peuvent être considérés comme des suspensions très concentrées de mèches de fibres de verre dont le fluide suspensif est non newtonien, conditionne très largement les propriétés des produits fabriqués et est encore mal maîtrisée.

La rhéologie des suspensions est pilotée par de nombreux paramètres microstructuraux tels que le taux, l'orientation et la distribution spatiale des fibres, les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice et les interactions fibres-matrice et fibre-fibre. A ce jour, de très nombreux travaux ont porté sur le problème de l'étude des suspensions diluées ou semi-diluées dans un fluide newtonien. L'essentiel de ces recherches s'appuie sur les travaux de Jeffery (Jeffery, 1922) et de Batchelor (Batchelor, 1970). Ils conduisent tous à une expression du tenseur des contraintes macroscopiques de la suspension $\sigma^{(s)}$ de la forme :

$$\sigma^{(s)} = -p^{(s)}\delta + \sigma^{(m)} + \sigma^{(f)}, \quad [1]$$

où la pression $p^{(s)}$ est liée à l'incompressibilité de la suspension, et où $\sigma^{(m)}$ et $\sigma^{(f)}$ sont les contributions de la matrice et des fibres au tenseur des contraintes total. $\sigma^{(f)}$ dépend des interactions fibres-matrice et des interactions fibre-fibre. Ces modèles prennent généralement en compte l'orientation des fibres via des tenseurs d'orientation dont il faut prédire l'évolution (Dupret *et al.*, 1999). Le comportement global de la suspension est alors calculé en couplant un modèle anisotrope pour $\sigma^{(s)}$ et un modèle d'évolution des tenseurs d'orientation durant l'écoulement. Notons enfin que toutes ces approches sont plutôt restreintes au cas de fluides porteurs newtoniens. A notre connaissance, très peu de contributions ont à ce jour porté sur des suspensions semi-diluées de fibres dans une matrice en loi puissance (Goddard, 1976; Gibson *et al.*, 1999).

Les SMC et les TRE sont des suspensions dites concentrées : la distance moyenne entre les mèches de fibres est si faible que les mèches, au cours de la déformation de la suspension, interagissent par des actions à courte distance de type contacts physique et/ou hydrodynamique non newtonien. Pour décrire la rhéologie de ce genre de suspensions, les modèles semi-dilués sont souvent appliqués directement, même s'ils ne prennent pas correctement en compte les mécanismes physiques propres au régime concentré. Les divergences de ces approches avec les viscosités observées expérimentalement (Mackaplow *et al.*, 1996) proviennent essentiellement des interactions entre fibres qui jouent ici un rôle prépondérant. Les études menées sur la nature des interactions entre fibres (Petrich *et al.*, 1998; Ericsson *et al.*, 1997; Servais *et al.*, 1999a; Servais *et al.*, 1999b) tendent à montrer que celles-ci sont une combinaison de frottement

sec et de frottement hydrodynamique, ce dernier étant lié au cisaillement d'une petite zone de fluide emprisonné (e) au voisinage d'un point de contact.

Dans cette optique, Toll et Månson (Toll *et al.*, 1994) ont proposé un modèle statistique adapté aux suspensions planes de fibres plongées dans un fluide non newtonien. Dans cette approche, les forces d'interactions sont décomposées en une action normale, due à la flexion élastique des fibres selon la normale au plan, et une action tangentielle décomposée en une contribution de frottement sec et une contribution visqueuse non linéaire due au glissement relatif des fibres au niveau d'un point de contact. Servais *et al.* (Servais *et al.*, 1999b; Servais *et al.*, 1999a) ont plus tard précisé l'expression de cette composante tangentielle. Cette approche est toutefois assez restrictive car elle suppose que la vitesse du centre de chaque fibre est celle de la suspension et que la rotation d'une fibre est une fonction affine du gradient de déformation macroscopique.

Dans le même esprit, Le Corre *et al.* (Le Corre *et al.*, 2004) ont récemment proposé une approche théorique basée sur la méthode d'homogénéisation des structures discrètes périodiques pour décrire le comportement de réseaux de fibres rigides liées par des interactions en loi puissance, ces interactions induisant des forces et des moments locaux dus au mouvement relatif de deux fibres en contact. Ce travail théorique a été ensuite appliqué à la modélisation de la rhéologie des suspensions de type SMC et TRE dans (Le Corre *et al.*, 2005). Pour cela, un modèle micromécanique simple de liaison entre mèches a été proposé et des microstructures fibreuses ont été générées et sollicitées numériquement selon différents chargements mécaniques. Les réponses macroscopiques de microstructures représentatives ont été comparées avec succès aux résultats expérimentaux de rhéométrie obtenus sur des SMC (Le Corre *et al.*, 2002; Dumont *et al.*, 2003).

Dans cette contribution, on rappelle tout d'abord les hypothèses locales établies dans (Le Corre *et al.*, 2005) pour construire la description de la mécanique à l'échelle des fibres, dans le cas d'une suspension très concentrée de mèches de fibres à orientation plutôt plane. Les résultats théoriques déduits de (Le Corre *et al.*, 2004) ainsi que le schéma numérique de génération et déformation de microstructures utilisés dans (Le Corre *et al.*, 2005) sont ensuite donnés. On analyse alors sur quelques exemples l'impact de la microstructure et du chargement mécanique sur le comportement macroscopique des suspensions étudiées.

2. Position du problème

Les suspensions considérées (de type SMC ou GMT) sont des feuilles d'épaisseur h où les mèches de fibres de longueur l sont distribuées de façon homogène dans le plan des feuilles $\mathcal{P} \equiv (e_1, e_2)$ et immergées dans un fluide non newtonien. L'épaisseur h (direction e_3) est supposée faible devant l . De plus, les suspensions sont supposées incompressibles et suffisamment concentrées pour former un réseau de mèches connectées. Leur déformation est alors pilotée essentiellement par les interactions à

courte distance entre mèches. Une telle hypothèse est confirmée par de nombreux résultats expérimentaux obtenus sur des SMC et TRE (Ericsson *et al.*, 1997; Servais *et al.*, 1999b; Servais *et al.*, 1999a; Le Corre *et al.*, 2002; Servais *et al.*, 2002; Dumont *et al.*, 2003). Au niveau macroscopique, ceci conduit à négliger $\sigma^{(m)}$ dans (1). Pour évaluer le tenseur des contraintes macroscopique $\sigma^{(f)}$, nous adoptons une méthode de changement d'échelle déterministe (voir partie 3). Comme toute technique d'homogénéisation, les résultats que l'on peut en tirer n'auront de sens que si la condition de séparation des échelles est satisfaite, c'est-à-dire si $\epsilon = d/L \ll 1$, où d et L sont respectivement la longueur caractéristique des hétérogénéités à l'échelle des mèches et celle des pièces fabriquées. Pour les SMC ou les TRE, d est de l'ordre de l (≈ 25 mm) et L est de l'ordre de 1 m. La séparation des échelles est donc assez bonne puisque $\epsilon \approx 2.5 \cdot 10^{-2}$.

2.1. Géométrie des mèches de fibres

Les mèches de fibres de verre couramment utilisées dans les SMC sont en général constituées de plusieurs centaines de fibres de verre alignées de $\approx 15 \mu\text{m}$ de diamètre et dont la longueur est de l'ordre de ≈ 25 mm. Elles ont des sections droites plutôt elliptiques très aplaties, où la dimension la plus grande d_{max} vaut environ 0.6 mm et où la plus petite d_{min} vaut environ 0.06 mm. Nous supposons dans la suite que ces données ne varient pas lors d'une compression. Par ailleurs, comme l'épaisseur des feuilles $h \approx 2 - 3$ mm est relativement faible par rapport à la longueur des mèches, il est possible considérer que l'orientation moyenne de chaque mèche b définie par le vecteur unitaire e_b est contenue dans le plan \mathcal{P} . De la même façon, l'aspect très aplati des sections droites permet de supposer que d_{max} appartient également à ce plan.

2.2. Cinématique des mèches

Pour décrire la rhéologie des suspensions considérées, plusieurs hypothèses sur la cinématique, listées ci-dessous, sont formulées.

– En première approximation, de façon analogue à celle adoptée par Servais *et al.* (Servais *et al.*, 1999a), la flexion des mèches dans \mathcal{P} est négligée et leur section droite est supposée rester elliptique durant la déformation, avec d_{max} pour grand axe et d_{min} pour petit axe. Si on note \tilde{x} la projection de x dans \mathcal{P} et $G_b K = s_b e_b + z_b e_3$, alors la vitesse $\tilde{v}_b(K)$ d'un point K situé à l'abscisse curviligne s_b et à une hauteur z_b du centre de masse G_b de la mèche b , s'écrit :

$$\tilde{v}_b(K) = \tilde{v}_b + s_b \omega_b e_3 \times e_b, \quad [2]$$

où \tilde{v}_b et ω_b sont respectivement la vitesse dans le plan de G_b et la vitesse de rotation de la mèche autour de e_3 .

– Du fait des faibles rapports d_{min}/d_{max} et h/l , la rotation ω_b d'une mèche b est supposée être contenue dans \mathcal{P} :

$$\omega_b(K) \approx \omega_b e_3. \quad [3]$$

– Les cas de cisaillement dans l'épaisseur des feuilles ne sont pas étudiés. Si on note $\mathbf{L}^{(s)} = \nabla \mathbf{v}^{(s)}$ le gradient de vitesse macroscopique de la suspension, seules les situations où $L_{i3} = L_{3i} = 0$ ($i = 1, 2$) sont envisagées.

Ces hypothèses réduisent donc l'étude aux suspensions où les mèches de fibres ont et gardent une orientation plane et se déforment peu dans le plan \mathcal{P} , ainsi qu'aux situations où le cisaillement hors plan est faible.

2.3. Mécanique des interactions entre mèches

Les constatations expérimentales menées sur des suspensions de fibres concentrées (Ericsson *et al.*, 1997; Servais *et al.*, 1999b; Servais *et al.*, 1999a; Le Corre *et al.*, 2002; Servais *et al.*, 2002; Dumont *et al.*, 2003) fournissent de précieuses indications sur la nature des différents types d'interactions mèche-mèche possibles. En se basant sur ces dernières, il est supposé que les interactions entre mèches sont des forces et des moments de nature visqueuse, dus au cisaillement d'un corps purement visqueux emprisonné (e) au niveau des points de contact, dont la rhéologie serait équivalente à celle d'un fluide homogène visqueux et incompressible en loi puissance occupant le même volume :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)} = -p_{(e)} \boldsymbol{\delta} + 2\eta_{(e)} (\dot{\gamma}_{(e)}/\dot{\gamma}_0)^{m-1} \mathbf{D}_{(e)}, \quad [4]$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$ et $p_{(e)}$ sont respectivement le tenseur des contraintes local et la pression dans le fluide emprisonné, $\dot{\gamma}_{(e)}$ est le taux de déformation local, $\eta_{(e)}$ la viscosité du fluide à un taux de déformation caractéristique $\dot{\gamma}_0$, m est l'indice de la loi puissance ($m > 0$), et $\mathbf{D}_{(e)}$ est le tenseur vitesse de déformation local.

La géométrie réelle d'une zone d'interaction entre mèches est certainement complexe et difficile à appréhender. Cependant, d_{max} étant environ 10 fois plus grand que d_{min} , on peut effectuer une analyse dimensionnelle raisonnable en assimilant cette zone à un prisme d'épaisseur α faible (voir figures 1(b) et 1(c)).

Pendant le déplacement relatif d'un couple k de mèches connectées b et c (le centre de la zone de contact est noté K), le fluide est soumis à la superposition d'un cisaillement simple, induit par la différence $\Delta \tilde{\mathbf{v}}_k$ des vitesses des mèches dans le plan, et d'un cisaillement rotatif, dû à la différence des vitesses de rotation des mèches $\Delta \omega_k e_3$ (voir figure 1(c)). En négligeant les forces $\mathbf{f}_k \cdot e_3$ normales au plan \mathcal{P} , (dues principalement à la flexion des mèches hors du plan), i.e. $\mathbf{f}_k \cong \tilde{\mathbf{f}}_k$, il est possible d'obtenir des estimations analytiques des forces $\tilde{\mathbf{f}}_k$ et moments $M_k e_3$ de liaisons (Le Corre *et al.*, 2005) :

$$\tilde{\mathbf{f}}_k = \frac{\eta_{(e)}}{\alpha} \frac{d_{max}^2}{|\sin \Delta \theta_k|} \left(\frac{\|\Delta \tilde{\mathbf{v}}_k\|}{\alpha \dot{\gamma}_0} \right)^{m-1} \Delta \tilde{\mathbf{v}}_k = \mu_k \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}_k\|^{m-1} \Delta \tilde{\mathbf{v}}_k, \quad [5]$$

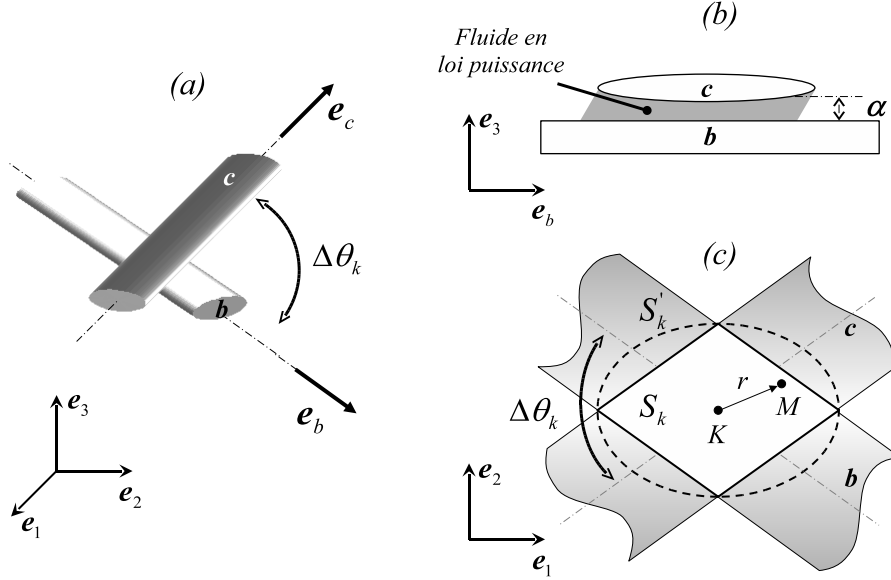


Figure 1. Modélisation des interactions mèche-mèche : vue de côté de la zone cisailée (b), vue de dessus de la surface d'interaction (c)

$$M_k(K) = \mu_k \frac{\pi}{m+3} \left(\frac{d_{max}}{|\sin \Delta\theta_k|} \right)^{m+1} |\Delta\omega_k|^{m-1} \Delta\omega_k. \quad [6]$$

2.4. Equilibre d'une mèche

En négligeant l'accélération, les forces et les moments volumiques externes, et en introduisant \mathcal{C}_b l'ensemble des connections de la mèche b , l'équation d'équilibre d'une mèche b peut alors s'écrire (Le Corre *et al.*, 2005) :

$$\forall b, \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in \mathcal{C}_b} \mathbf{f}_k = \mathbf{0} \\ \sum_{k \in \mathcal{C}_b} M_k(K) \mathbf{e}_3 = \sum_{k \in \mathcal{C}_b} s_b \mathbf{f}_k \times \mathbf{e}_b + \sum_{k \in \mathcal{C}_b} z_k \mathbf{f}_k \times \mathbf{e}_3 \end{array} \right. \quad [7]$$

en notant $\mathbf{G}_b \mathbf{K}_k = s_b \mathbf{e}_b + z_k \mathbf{e}_3$. Dans l'équation (7)(b), il est facile de montrer que le second terme du membre de droite est négligeable par rapport au premier ($d_{min}/l = \mathcal{O}(\epsilon^2)$). Ainsi, les forces de contact étant contenues dans \mathcal{P} et fonctions de $\Delta\tilde{\mathbf{v}}_k$ uniquement, ces équations se réduisent à un problème mécanique bidimensionnel.

3. Changement d'échelle

Pour obtenir le comportement macroscopique d'une telle suspension fibreuse, la méthode d'homogénéisation des structures discrètes périodiques a été utilisée (Moreau *et al.*, 1998; Tollenaere *et al.*, 1998). On rappelle ici les principaux résultats issus de ce travail. Pour plus de détails, le lecteur se référera à (Le Corre *et al.*, 2004). Dans cette méthode, la suspension est vue comme un assemblage périodique de Volumes Élémentaires Représentatifs (VER) contenant chacun N mèches b et C liaisons k . Dans l'hypothèse de séparation des échelles, les différents champs \mathbf{u} du problème (vitesses de translation et de rotation) sont écrits sous forme de développements asymptotiques « discrets » en puissance de ϵ :

$$\tilde{\mathbf{u}}_b(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{u}}_b^{[0]}(\tilde{\mathbf{x}}) + \epsilon \tilde{\mathbf{u}}_b^{[1]}(\tilde{\mathbf{x}}) + \epsilon^2 \tilde{\mathbf{u}}_b^{[2]}(\tilde{\mathbf{x}}) + \dots \quad [8]$$

Les champs $\tilde{\mathbf{u}}_b^{[n]}$ sont les fluctuations d'ordre ϵ^n de $\tilde{\mathbf{u}}_b$, fonctions continues de la variable d'espace $\tilde{\mathbf{x}}$ et périodiques par rapport à l'indice b . Ces développements asymptotiques sont introduits dans les équations d'équilibre locales, et l'identification des différents termes apparaissant aux mêmes ordres de ϵ permet d'obtenir les équations d'équilibre et la loi de comportement macroscopique du réseau de fibres considéré. En supposant que les moments de liaisons locaux sont petits devant les moments générés par les forces de liaisons, on montre les différents points suivants.

– Les vitesses au premier ordre $\tilde{\mathbf{v}}_b^{[0]}$ ne dépendent pas de la mèche b considérée :

$$\forall b, \quad \tilde{\mathbf{v}}_b^{[0]} = \tilde{\mathbf{v}}^{(s)}. \quad [9]$$

– Le milieu continu équivalent est un milieu de Cauchy, dont le tenseur des contraintes symétrique s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)} = \frac{1}{V^{(s)}} \sum_{k=1}^C \tilde{\boldsymbol{\xi}}_k \otimes \tilde{\mathbf{f}}_k^{[0]}. \quad [10]$$

Dans cette équation $V^{(s)}$ est le volume du VER considéré, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_k$ est la projection de $\mathbf{G}^b \mathbf{G}^c$ dans le plan \mathcal{P} et $\tilde{\mathbf{f}}_k^{[0]}$ est le premier terme non nul du développement asymptotique des forces d'interaction \mathbf{f}_k . $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)}$ peut être déterminé en calculant les forces $\tilde{\mathbf{f}}_k^{[0]}$ données par :

$$\tilde{\mathbf{f}}_k^{[0]} = \frac{\eta(e)}{\alpha |\sin \Delta\theta_k|} \left(\frac{\|\Delta\tilde{\mathbf{v}}_k^{[1]}\|}{\alpha\gamma_0} \right)^{m-1} \Delta\tilde{\mathbf{v}}_k^{[1]} \quad [11]$$

avec

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_k^{[1]} = \tilde{\mathbf{v}}_c^{[1]} - \tilde{\mathbf{v}}_b^{[1]} + \tilde{\mathbf{L}}^{(s)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}}_k + s_c^* \phi_c^{[0]} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_c - s_b^* \phi_b^{[0]} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_b \quad [12]$$

où s_b^* désigne la quantité s_b/d et ϕ_b la quantité $L\omega_b$.

– La suspension considérée est un fluide anisotrope en loi puissance, dont l'indice de sensibilité à la vitesse m est égal à celui postulé au niveau des interactions entre mèches.

– Les inconnues cinématiques $\tilde{v}_b^{[1]}$ et $\omega_b^{[0]}$ peuvent être calculées en considérant $\tilde{L}^{(s)}$ comme une donnée dans le problème non linéaire d'auto-équilibre posé sur le VER :

$$\forall b \in V^{(s)}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in \mathcal{C}_b} \tilde{f}_k^{[0]} = \mathbf{0} \\ \sum_{k \in \mathcal{C}_b} M_k^{[0]} \mathbf{e}_3 + \sum_{k \in \mathcal{C}_b} s_b \mathbf{e}_b \times \tilde{f}_k^{[0]} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad [13]$$

avec

$$M_k^{[0]} = \mu_k \left[\frac{\pi}{m+3} \left(\frac{d_{max}}{|\sin \Delta \theta_k|} \right)^{m+1} \right] |\omega_c^{[0]} - \omega_b^{[0]}|^{m-1} (\omega_c^{[0]} - \omega_b^{[0]}). \quad [14]$$

En supposant qu'il n'y a pas de mèches ou de groupes de mèches isolés, on obtient ainsi un problème bien posé qui permet d'obtenir $\tilde{v}_b^{[1]}$ et $\omega_b^{[0]}$ quel que soit le taux de déformation macroscopique imposé.

4. Génération de microstructures représentatives

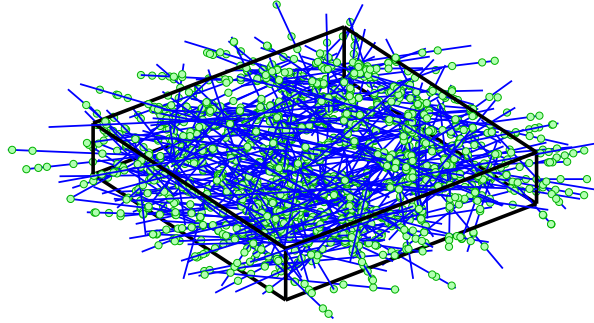


Figure 2. Exemple de VER généré ($V^{(s)} = 25 \times 25 \times 2.5 \text{ mm}^3$), contenant 437 mèches de longueur 25mm ($f^{(f)} = 0.188$). Les symboles \circ représentent la position des connexions ($\delta^* = 3$)

Les techniques usuelles d'observation de la morphologie d'un réseau de fibres peuvent fournir des informations sur l'orientation et la position des mèches mais ne permettent pas encore, à notre connaissance, d'obtenir les données relatives à la connectivité du réseau. Le moyen le plus simple s'offrant à nous est donc la génération numérique.

Pour imiter au mieux et simplement les microstructures réelles, nous générons des réseaux 3D contenant N mèches avec des positions aléatoires (x_b, y_b) dans le plan des feuilles comprises entre $[-d/2, d/2]$ et des hauteurs aléatoires z_b dans $[0, h]$, d et h désignant les dimensions du VER. Différents degrés d'orientation sont ensuite obtenus en utilisant une distribution aléatoire gaussienne des angles θ_b centrée sur $\theta = 0$ et avec un écart type variant selon le degré d'orientation souhaité. La connectivité, c'est-à-dire la position des C contacts entre fibres, est ensuite calculée par une méthode déterministe basée sur une approche de type « tube model » (Ranganathan *et al.*, 1991; Toll, 1993). Pour ce faire, on définit un volume de contrôle V_b autour de chaque mèche b , et chaque mèche c dont la ligne moyenne intersecte V_b est ajoutée à l'ensemble de connectivité de b , C_b . V_b est ici une boîte rectangulaire de dimensions $l \times d_{max} \times \delta^* d_{min}$, où δ^* est un paramètre sans dimension dont la valeur peut être déterminée expérimentalement (Le Corre *et al.*, 2005). Nous fixerons ici sa valeur arbitrairement à 3. Il est possible de montrer qu'à partir d'un nombre suffisant de mèches dans le VER (≈ 400), les réseaux ainsi générés suivent les prédictions du modèle statistique de Toll (Toll, 1993).

Pour décrire et comparer les différents réseaux de fibres entre eux, nous adopterons ici le tenseur d'orientation d'ordre 2, $\tilde{\mathbf{A}}$ (Advani *et al.*, 1987), plutôt que la fonction de distribution d'orientation (Folgar *et al.*, 1984), plus lourde à manipuler :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_b. \quad [15]$$

Nous utiliserons également la fraction volumique de mèches $f^{(f)}$, directement liée au nombre de mèches par unité de volume $n^{(f)}$ par

$$f^{(f)} = \frac{V^{(f)}}{V^{(s)}} = \frac{\pi}{4} l d_{max} d_{min} n^{(f)} \quad \text{avec} \quad n^{(f)} = \frac{N}{V^{(s)}}. \quad [16]$$

Avec ces notations, la densité de connexions $c^{(f)}$ s'écrit

$$c^{(f)} = \frac{C}{V^{(s)}} = \frac{1}{2} n^{(f)} \times n_{c/b}, \quad [17]$$

où le nombre moyen théorique de connexions par mèche $n_{c/b}$ (Toll, 1993) vaut ici :

$$n_{c/b} = n^{(f)} l \delta^* (l d_{min} \phi_1 + d_{max} d_{min} \phi_2 + d_{max} d_{min}). \quad [18]$$

Dans cette équation, les fonctions d'orientation ϕ_1 and ϕ_2 théoriques (Toll, 1993) sont calculées par

$$\phi_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N |\sin(\theta_b - \theta_c)| \quad \text{et} \quad \phi_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{b=1}^N \sum_{c=1}^N |\cos(\theta_b - \theta_c)|. \quad [19]$$

5. Expériences de rhéométrie numérique

Les VER étant générés et la physique des interactions entre mèches donnée, la rhéologie de ce type de suspension peut maintenant être étudiée via des *expériences de rhéométrie numérique* dont les différentes étapes sont énumérées ci-dessous.

1) Imposer un gradient de vitesses macroscopique $\tilde{\mathbf{L}}^{(s)}$ dans \mathcal{P} . Les suspensions étant supposées incompressibles et comme $L_{i3} = L_{3i} = 0$ ($i = 1, 2$), ceci est équivalent à imposer un gradient de déformation tridimensionnel $\mathbf{L}^{(s)}$.

2) Résoudre le système (13) pour calculer les champs $\tilde{\mathbf{v}}_b^{[1]}$ et $\omega_b^{[0]}$. Ceci est effectué par une méthode itérative de Newton-Raphson.

3) Calculer :

- la dérivée temporelle $\dot{\tilde{\mathbf{A}}}$ du tenseur d'orientation $\tilde{\mathbf{A}}$ définie comme :

$$\dot{\tilde{\mathbf{A}}} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \dot{\mathbf{e}}_b \otimes \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_b \otimes \dot{\mathbf{e}}_b = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_b) \otimes \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_b \otimes (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_b) \quad [20]$$

- le tenseur des contraintes macroscopique $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)}$ (dans le cas particulier des réseaux, qui suivent la statistique du modèle tube, une expression intéressante de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)}$ peut être établie en notant $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_k^* = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_k/l$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)} = \eta_{(e)} \frac{\delta^*}{\alpha^m} \frac{8f^{(f)^2}}{\pi^2} \frac{d_{max}}{d_{min}} \left(\frac{l}{d_{max}} \phi_1 + \phi_2 + 1 \right) \frac{1}{C} \sum_{k=1}^C \frac{\|\Delta \tilde{\mathbf{v}}_k^{[1]}\|^{m-1}}{|\sin \Delta \theta_k|} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_k^* \otimes \Delta \tilde{\mathbf{v}}_k^{[1]}, \quad [21]$$

cette équation révèle clairement le rôle de la géométrie des mèches, de la fraction de fibres, de l'orientation (ϕ_1, ϕ_2), de la physique des interactions ($\eta_{(e)}, m, \alpha, |\sin \Delta \theta_k|$) et du chargement extérieur ($\Delta \tilde{\mathbf{v}}_k^{[1]}(\tilde{\mathbf{L}}^{(s)})$), sur l'état de contraintes général)

- le tenseur des contraintes macroscopique de la suspension $\boldsymbol{\sigma}^{(s)}$, où une extension 3D très simple est proposée :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s)} = -p\boldsymbol{\delta} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)}. \quad [22]$$

Les exemples de simulation présentés dans la suite, qui illustrent l'influence de la microstructure et de la rhéologie des liaisons mèche-mèche sur le comportement de la suspension, ont été réalisés sur des VER ayant les paramètres suivants.

– Les mèches ont pour dimensions $l = 25$ mm, $d_{max} = 0.6$ mm, $d_{min} = 0.06$ mm, les VER sont des pavés de $25 \times 25 \times 2.5$ mm³.

– Les réseaux fibreux ont été générés selon la procédure décrite précédemment, dans les axes du repère ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) ($\tilde{A}_{12} \approx 0$). L'orientation principale \tilde{A}_{11} étudiée est comprise entre 0 et 1. Les taux fibres étudiés varient entre 0.05 et 0.3.

– Deux indices de sensibilité à la vitesse sont envisagés, $m = 1$ (comportement newtonien) et $m = 0.5$ (comportement rhéofluidifiant).

– L'épaisseur des zones de contact cisillées est fixée à $2 \mu\text{m}$ (Le Corre *et al.*, 2005).

– Les VER ainsi générés sont déformés sous une sollicitation de type compression en canal, pour laquelle le tenseur de vitesse de déformation est (en s^{-1}) :

$$\mathbf{D}^{(s)} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad [23]$$

A sollicitation identique, les niveaux de contraintes obtenus dans les cas $m = 1$ et $m = 0.5$ sont très différents. Comme seules nous importent ici les tendances obtenues en fonction des paramètres microstructuraux, les réponses en contrainte des différents VER présentées dans les figures suivantes (3, 4 et 5) ont été normalisées par rapport à un niveau de contrainte de référence σ_{ref} . Pour chaque m , celui-ci correspond à la composante $\tilde{\sigma}_{11}^{(f)}$ d'un VER à $f^{(f)} = 0.188$ avec une orientation quasi isotrope dans le plan, soumis à une sollicitation de type compression en canal.

5.1. Influence du taux de fibres

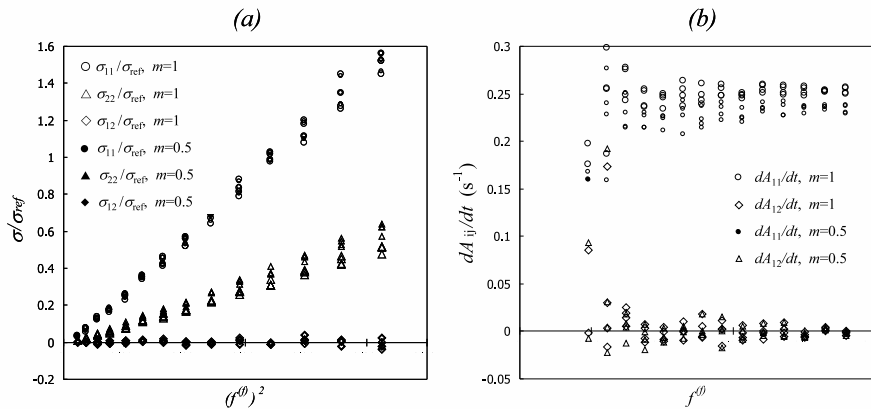


Figure 3. Influence de la fraction de fibres sur la réponse en contraintes (a) et en vitesse d'orientation (b), pour deux indices de sensibilité à la vitesse de déformation ($m = 1$ et $m = 0.5$) - réseaux orientés aléatoirement dans le plan ($\tilde{A}_{11} \approx 0.5$)

La figure 3(a) donne l'évolution des contraintes $\tilde{\sigma}_{ij}^{(f)}$ en fonction du carré du taux de fibres $f^{(f)}$, pour des microstructures quasi isotropes ($\tilde{A}_{11} \approx 0.5$) et pour les deux valeurs de m envisagées. Cette figure montre d'une part la forte influence de $f^{(f)}$, et d'autre part que les contraintes sont des fonctions quadratiques de la fraction de fibres, comme cela est suggéré par l'équation (21). Les composantes \dot{A}_{11} et \dot{A}_{12} du tenseur $\dot{\mathbf{A}}$ calculées pour les mêmes microstructures sont reportées sur la figure 3(b). Quelle que soit la microstructure étudiée, on remarque d'une part que les

composantes $\dot{\tilde{A}}_{12}$ sont très faibles devant les composantes $\dot{\tilde{A}}_{11}$ (essais dans les axes) et d'autre part que le taux de fibres influe très peu sur les résultats. Ces observations sont confirmées par les figures 4(a) et 4(b) qui représentent les mêmes types de tests sur des microstructures bien orientées dans la direction de la sollicitation ($\tilde{A}_{11} \approx 0.8$).

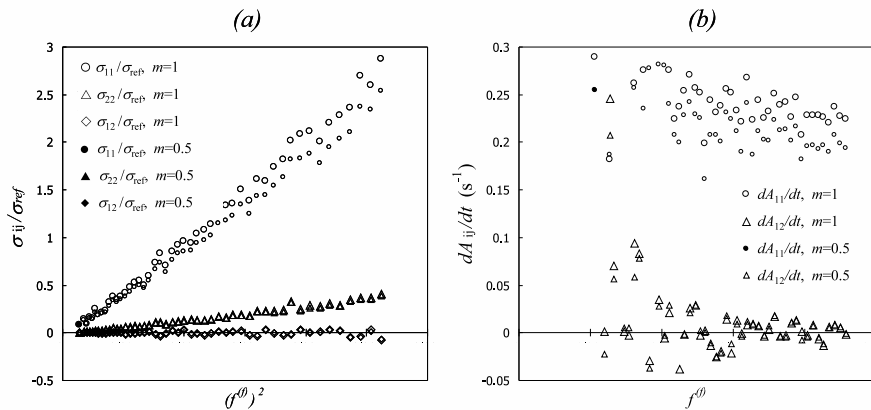


Figure 4. Influence de la fraction de fibres sur les contraintes (a) et la vitesse d'orientation (b), pour $m = 1$ et $m = 0.5$ - réseaux orientés selon e_1 ($\tilde{A}_{11} \approx 0.8$)

5.2. Influence de l'orientation courante des fibres

Dans la figure 5, nous présentons ensuite des résultats de compression en canal réalisés sur des réseaux à même fraction de fibres ($f^{(f)} = 0.188$), mais avec des orientations différentes, allant du cas parfaitement orienté dans la direction e_2 ($\tilde{A}_{11} \approx 0$) jusqu'au cas parfaitement orienté dans la direction e_1 ($\tilde{A}_{11} \approx 1$). La figure 5(a) montre que les composantes du tenseur des contraintes $\tilde{\sigma}_{ij}^{(f)}$ sont très sensibles à l'orientation courante (mesurée ici par \tilde{A}_{11}), et ce pour les deux valeurs de m envisagées. Le rapport des contraintes principales $\tilde{\sigma}_{11}^{(f)}/\tilde{\sigma}_{22}^{(f)}$ est voisin de 2.5 pour les orientations isotropes, alors qu'il tend vers des valeurs très fortes (> 50) pour les orientations prononcées selon e_1 . De la même manière, la vitesse de réorientation des mèches dans la direction de la sollicitation (donnée par \tilde{A}_{11}) est elle aussi fortement influencée par l'orientation courante. Elle est maximale pour les microstructures quasi isotropes et décroît régulièrement avec l'intensité de l'orientation, que celle-ci soit dans la direction e_1 ou e_2 . On peut remarquer que l'évolution de \tilde{A}_{11} n'est pas exactement symétrique par rapport à $\tilde{A}_{11} = 0.5$, la décroissance vers zéro pour les valeurs de \tilde{A}_{11} faibles étant plus nette que pour les valeurs de \tilde{A}_{11} proches de 1. Remarquons enfin que la composante \tilde{A}_{12} n'est pas influencée par \tilde{A}_{11} (sollicitation dans les axes des microstructures).

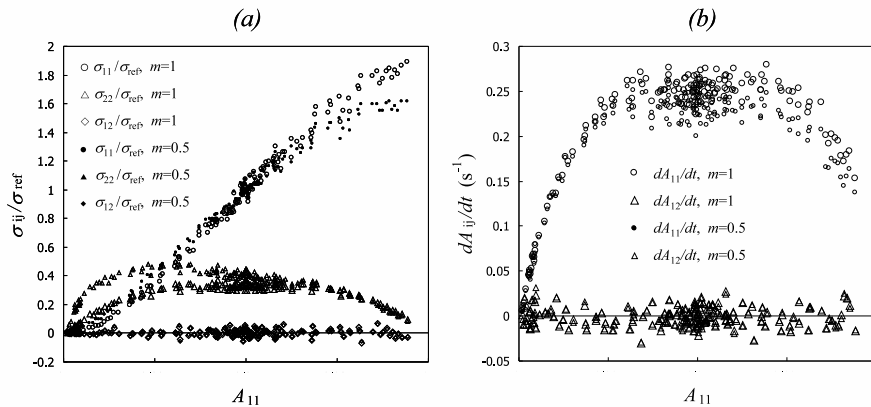


Figure 5. Influence de l'intensité de l'orientation (\tilde{A}_{11}) sur la réponse en contraintes (a) et vitesse d'orientation moyenne (b) - $f^{(f)}=0.188$, cellules orientées selon e_1

5.3. Influence de l'indice de sensibilité à la vitesse

Sur les trois figures précédentes, nous avons représenté en parallèle les résultats du calcul d'homogénéisation pour deux valeurs de l'indice de sensibilité à la vitesse m . L'ensemble de ces figures tend à montrer que pour les deux valeurs de m utilisées, les contraintes normalisées ainsi que les taux d'orientation suivent quasiment les mêmes tendances à quelques nuances près qu'il faudrait confirmer par d'autres simulations :

- sur la figure 5(a), on note dans le cas $m = 0.5$ une inflexion de la courbe $\tilde{\sigma}_{11}^{(f)}(\tilde{A}_{11})$ pour $\tilde{A}_{11} > 0.75$ et une importante augmentation de $\tilde{\sigma}_{22}^{(f)}$ pour $\tilde{A}_{11} < 0.3$,
- sur la figure 5(b) on remarque que pour $\tilde{A}_{11} > 0.3$, la composante \tilde{A}_{11} est une fonction croissante de m .

6. Conclusion

Nous avons développé une approche numérique basée sur l'homogénéisation des structures discrètes périodiques pour analyser les relations entre la microstructure et les propriétés rhéologiques macroscopiques de suspensions de mèches de fibres concentrées avec une orientation plane. Le milieu est décrit comme un réseau de mèches indéformables dans le plan de la suspension, connectées par des liaisons visqueuses en loi puissance qui engendrent des forces et des moments d'interaction. Pour se rapprocher des cas industriels tels que ceux des SMC ou des TRE, nous avons mis

en place une procédure de génération numérique pour construire des suspensions idéalisées avec différents taux de renfort et différentes orientations. Ceci nous a permis de réaliser des expériences de « rhéométrie numérique » mettant en évidence la forte influence de la microstructure sur le comportement macroscopique.

Le premier résultat de cette étude est théorique : si les interactions entre mèches suivent une loi puissance de la vitesse relative entre mèches, l'ensemble de la suspension se comporte également comme un fluide en loi puissance, avec la même sensibilité à la vitesse que celle postulée au niveau des interactions (Le Corre *et al.*, 2004). De la même façon, la dérivée du tenseur d'orientation, et plus généralement la variation temporelle de l'orientation, est une fonction homogène de degré 1 par rapport au gradient de vitesse macroscopique (Le Corre *et al.*, 2005). Ces résultats sont obtenus de manière théorique et ne dépendent pas de la technique de génération. De plus, la forme générale de la loi de comportement macroscopique montre que les contraintes sont des fonctions quadratiques de la fraction volumique de mèches : ceci est directement lié à la méthode de détection des contacts utilisée, qui suit le « modèle tube » statistique.

Il faut noter que ce modèle ne demande que très peu de paramètres rhéologiques, ceux-ci étant pour la plupart liés à des grandeurs physiques mesurables, associées à la morphologie des mèches de fibres. Malgré les hypothèses de modélisation très simples adoptées, les comparaisons avec des résultats expérimentaux sur des SMC (Le Corre *et al.*, 2005) montrent une bonne corrélation pour les niveaux de viscosité dans les gammes de fractions de fibres et de vitesses de déformation testées. Les résultats numériques soulignent également les forts couplages entre l'orientation, le taux de fibres et la rhéologie de la suspension. Ils doivent être complétés par d'autres sollicitations mécaniques et d'autres paramètres microstructuraux. Ceci permettrait de constituer une base de données précieuse qui pourrait être comparée aux modèles rhéologiques existants, développés dans le cadre des suspensions semi-diluées et concentrées, ainsi qu'aux modèles décrivant l'évolution de l'orientation des fibres dans les suspensions.

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier la Région Rhône-Alpes, et leurs partenaires industriels Groupe Mecelc-Inoplast, Renault, Schneider Electric et Renault Trucks, pour leur soutien technique et financier.

7. Bibliographie

- Advani S. G., Tucker C. L., « The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites », *J. Rheol.*, vol. 3, n° 8, p. 751-784, 1987.
- Batchelor G., « The Stress System in a Suspension of Force-Free Particles », *J. Fluid Mech.*, vol. 41, p. 545-570, 1970.

- Dumont P., Orgéas L., Le Corre S., Favier D., « Anisotropic Viscous Behaviour of Sheet Molding Compounds (SMC) During Compression Molding », *Int. J. Plasticity*, vol. 19, n° 4, p. 625-646, 2003.
- Dupret F., Verleye V., *Modelling the Flow of Fiber Suspensions in Narrow Gaps*, Rheology Series, Elsevier, Amsterdam, p. 1347-1398, 1999.
- Ericsson K. A., Toll S., Månson J.-A. E., « Sliding Plate Rheometry of Planar Oriented Concentrated Fiber Suspension », *Rheol. Acta*, vol. 36, p. 397-405, 1997.
- Folgar F., Tucker C., Lee C., « Simulation of compression molding for fiber-reinforced thermosetting polymers », *J. Eng. Ind. - Trans. ASME*, vol. 106, p. 114-125, 1984.
- Gibson A., Toll S., « Mechanics of the squeeze flow of planar fibre suspensions », *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 82, p. 1-24, 1999.
- Goddard J. D., « Tensile Stress Contribution of Flow-Oriented Slender Particles in Non-Newtonian Fluids », *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 1, p. 1-17, 1976.
- Jeffery G. B., « The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid », *Proc. Roy. Soc. London*, vol. (A) 102, p. 161-179, 1922.
- Le Corre S., Caillierie D., Orgéas L., Favier D., « Behavior of a Net of Fibers Linked by Viscous Interactions : Theory and Mechanical Properties », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 52, p. 395-421, 2004.
- Le Corre S., Dumont P., Orgéas L., Favier D., « Rheology of highly concentrated planar fiber suspensions », *J. Rheol.*, 2005. (accepted).
- Le Corre S., Orgéas L., Favier D., Tourabi A., Maazouz A., Venet C., « Shear and compression behaviour of Sheet Molding Compounds », *Compos. Sci. Technol.*, vol. 62, n° 4, p. 571-577, 2002.
- Mackaplow M. B., Shaqfeh E. S. G., « A Numerical Study of the Rheological Properties of Suspensions of Rigid, Non-Brownian Fibres », *J. Fluid Mech.*, vol. 329, p. 155-186, 1996.
- Moreau G., Caillierie D., « Continuum Modeling of Lattice Structures in Large Displacement - Applications to Buckling Analysis », *Comput. Struct.*, vol. 68, p. 181-189, 1998.
- Petrich M. P., Koch D. L., « Interactions between contacting fibers », *Phys. Fluids*, vol. 10, n° 8, p. 2111-2113, 1998.
- Ranganathan S., Advani S. G., « Fiber-Fiber Interactions in Homogeneous Flows of Non-Dilute Suspensions », *J. Rheol.*, vol. 35, p. 1499-1522, 1991.
- Servais C., Luciani A., Månson J.-A. E., « Fiber-fiber interaction in concentrated suspensions : dispersed fiber bundles », *J. Rheol.*, vol. 43, n° 4, p. 1005-1018, 1999a.
- Servais C., Luciani A., Månson J.-A. E., « Squeeze flow of concentrated long fibre suspensions : experiments and model », *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, vol. 104, p. 165-184, 2002.
- Servais C., Månson J.-A. E., Toll S., « Fiber-fiber interaction in concentrated suspensions : disperse fibers. », *J. Rheol.*, vol. 43, n° 4, p. 991-1004, 1999b.
- Toll S., « Note : On the Tube Model for Fiber Suspensions », *J. Rheol.*, vol. 37, n° 1, p. 123-125, 1993.
- Toll S., Månson J.-A. E., « Dynamics of a Planar Concentrated Suspension with Non-Hydrodynamic Interaction », *J. Rheol.*, vol. 38, n° 4, p. 985-997, 1994.
- Tollenaere H., Caillierie D., « Continuous modeling of lattice structures by homogenization », *Adv. Eng. Softw., special issue*, vol. 29, n° 7, p. 699-705, 1998.