
Déformation superélastique non homogène d'une éprouvette de traction NiTi. Expérience et modélisation numérique.

Laurent Orgéas †, Denis Favier † et Gérard Rio ‡.

† *Laboratoire Sols, Solides, Structures.
Université Joseph Fourier Grenoble I - Institut National Polytechnique de Grenoble
UMR CNRS 5521
BP 53X, 38041 Grenoble cedex 9, France
Tél. : 33-4-76-82-70-42 Fax : 33-4-76-82-70-43
Email : Denis.Favier@hmg.inpg.fr*

‡ *Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux
Université de Bretagne Sud,
2 Rue le Coat Saint Haouens, 56325 Lorient, France
Tél. : 33-2-97-88-05-30 Fax : 33-2-97-88-05-51
Email : Gerard.Rio@univ-ubs.fr*

RESUME. Le comportement superélastique d'un alliage à mémoire de forme polycristallin NiTi est étudié expérimentalement, théoriquement et numériquement. Lorsque le matériau se déforme par transformation martensitique induite sous contrainte, les résultats expérimentaux de caractérisation montrent une forte dissymétrie traction-compression ainsi qu'un phénomène de localisation de la déformation en traction. Pour tenir compte de ces deux phénomènes, un formalisme hyperélastique est développé et introduit dans un code de calculs de type éléments finis, écrit en grandes transformations. Les effets d'hystérésis sont négligés. Cependant, les simulations numériques réalisées permettent de bien rendre compte des résultats expérimentaux observés.

ABSTRACT. The superelastic behaviour of a polycrystalline NiTi shape memory alloy is studied experimentally, theoretically, and numerically. When the material is deformed by stress induced martensitic transformation, experimental results reveal both a strong tension-compression asymmetry and a non-homogeneous Lüders-like behaviour in tension. To account for these two phenomena, a hyperelastic scheme is developed and is implemented into a finite element code. This code is able to deal with large transformations. Hysteresis effects are neglected. Numerical simulations apprehend rather well experimental results.

MOTS-CLES. alliages à mémoire de forme, superélasticité, dissymétrie traction-compression, localisation de la déformation, hyperélasticité, grandes transformations.

KEY WORDS. shape memory alloy, superelasticity, tension-compression asymmetry, Lüders-like behaviour, hyperelasticity, large transformations.

1. Introduction

Les alliages à mémoire de forme (AMF) sont reconnus depuis quelques décennies pour leurs propriétés thermomécaniques remarquables. L'effet superélastique est une de ces propriétés ; il est corrélé à un phénomène physique appelé transformation martensitique thermoélastique induite sous contrainte, un changement de phase de type displacif du premier ordre [COH 79] entre une phase mère dite austénite, et une phase produit dite martensite. Les AMF possédant un bon effet superélastique sont capables, sous l'action d'une sollicitation mécanique, de présenter des déformations quasi-réversibles de l'ordre de huit pour cent en traction, dans le cas des alliages NiTi qui sont les AMF les plus utilisés industriellement. La connaissance et la maîtrise du comportement superélastique des AMF est une étape indispensable dans une démarche de modélisation de structures en AMF.

De nombreux travaux ont été réalisés pour connaître la dépendance du comportement superélastique avec la température. Il n'en est pas de même concernant la caractérisation du comportement mécanique sous sollicitations variées. En effet, la majorité des travaux expérimentaux se sont contentés d'étudier le comportement superélastique des AMF sous sollicitations de traction simple.

D'une part, les quelques études expérimentales effectuées sous des sollicitations homogènes autres que de traction ont montré l'importance du chemin de chargement emprunté sur la réponse du matériau. Un comportement dissymétrique probant a par exemple été observé entre traction et compression sur des alliages polycristallins de type NiTi [WAS 71][ROU 93][ORG 95], ou de type CuZnAl [VAC 91]. Les comparaisons effectuées entre traction, compression et cisaillement ont aussi montré que la notion d'équivalent de type Von Mises n'était pas systématiquement valable [MAN 97][ADL 90][ORG 98.a]. Un tel constat nécessite le développement de lois de comportement autres que celles utilisées habituellement pour la déformation à froid des matériaux métalliques denses.

D'autre part, dans certains cas (i.e. suivant l'histoire thermomécanique initiale et la géométrie des pièces en AMF), des phénomènes de localisation de la déformation de type bandes de Lüders sont observés en traction lors de la transformation ou de la réorientation induites sous contrainte [LIU 95][LIU 98][XIA 98]. La présence d'un tel mode de déformation complique foncièrement la démarche de l'interprétation des résultats expérimentaux en termes de mécanique des milieux continus, puisque dans ce cas de figure, la déformation dans la zone utile de l'échantillon n'est plus du tout homogène [SHA 95].

L'objectif de ce document est de montrer, dans une démarche de développement d'un outil numérique de conception adapté aux AMF, une manière d'appréhender ces deux problèmes, à savoir la dissymétrie traction-compression et la localisation de la déformation en traction simple. Après une brève introduction sur les aspects micros-

structuraux et thermodynamiques relatifs à la transformation martensitique induite sous contrainte, des résultats expérimentaux de traction-compression sont présentés. A partir de ces résultats, le cadre théorique et numérique est introduit : la cinématique et la loi de comportement utilisées dans le code de calcul *Herezh* sont exposées. Enfin, toute la démarche est illustrée et validée : les simulations numériques sont confrontées avec succès aux expériences de traction-compression.

2. Transformation martensitique thermoélastique induite sous contrainte

Les propriétés des AMF sont essentiellement corrélées au phénomène physique appelé transformation martensitique, une transformation de phase à l'état solide du premier ordre, displacive, homogène, thermoélastique et présentant un caractère déviatoire dominant [COH 79]. Sous l'effet de chargements thermomécaniques particuliers dans l'espace contrainte-déformation-température, la phase mère, dite austénite, peut se transformer en variantes de martensite, d'orientations cristallographiques différentes. Inversement, la transformation variantes de martensite \rightarrow austénite peut également se produire sous d'autres conditions de chargement thermomécanique. Très schématiquement, cette transformation martensitique thermoélastique peut se caractériser par un diagramme de phase de type contrainte - température, donné sur la Figure 2.1 dans le cas d'un chargement mécanique de cisaillement pur. Sur ce diagramme ont été reportées quatre températures caractéristiques du matériau : M_s et M_f sont respectivement les températures de début et de fin de transformation austénite \rightarrow martensite pour une rampe négative en température à contrainte de cisaillement τ nulle, alors que A_s et A_f sont les températures de début et de fin de transformation martensite \rightarrow austénite pour une rampe positive en température à contrainte nulle.

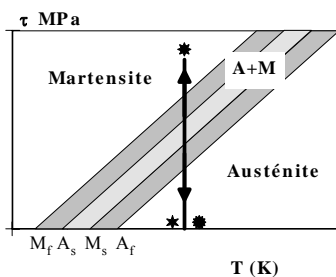


Figure 2.1 : Diagramme de phase (T , τ) schématisé.

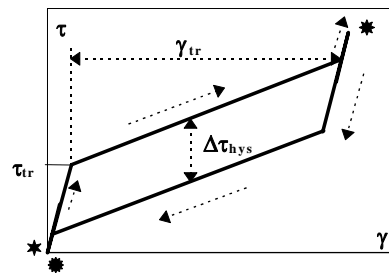


Figure 2.2 : Comportement superélastique en suivant le trajet de la Figure 2.1.

En empruntant dans ce diagramme de phase le trajet mécanique isotherme représenté sur la Figure 2.2 (effectué dans un domaine de températures tel que $T > A_f$), la réponse du matériau est dite superélastique. Au cours du chargement

4 Revue européenne des éléments finis

l'austénite initialement présente dans le matériau se transforme en martensite à partir d'une contrainte τ_r : les variantes les mieux orientées vis à vis de la sollicitation sont créées, générant ainsi un changement de forme γ_r significatif du matériau, de l'ordre de 12.5% en cisaillement pour un AMF de type NiTi polycristallin [ORG 98.a]. Lors de la décharge, la transformation inverse se produit avec une hystérésis caractérisée par $\Delta\tau_{hys}$ et le matériau recouvre sa forme initiale par transformation inverse martensite \rightarrow austénite. Il est évident qu'une telle présentation est très schématique, comme l'ont montré de nombreuses études expérimentales détaillées, par exemple sur la nature de l'hystérésis [ORG 98.b].

La description thermodynamique de cette transformation martensitique thermoélastique isotherme induite sous contrainte est classiquement réalisée en écrivant le premier et le second principe de la thermodynamique sur un élément de volume se transformant entre les instants t et $t + dt$. Dans l'hypothèse où les phénomènes d'hystérésis associés à la transformation martensitique sont négligés¹, cette écriture se simplifie selon :

$$dE^{A \rightarrow M} - TdS^{A \rightarrow M} = dF^{A \rightarrow M} = dW^{A \rightarrow M} \quad [1]$$

Dans cette équation, $dE^{A \rightarrow M}$, $dS^{A \rightarrow M}$ et $dF^{A \rightarrow M}$ représentent respectivement les variations infinitésimales de l'énergie interne, l'entropie et de l'énergie libre de Helmholtz de l'élément de volume considéré subissant la transformation de phase austénite \rightarrow martensite, alors que $dW^{A \rightarrow M}$ est le travail mécanique qu'échange cet élément de volume avec le milieu environnant.

La modélisation du comportement superélastique des AMF s'effectue à partir de ce type d'équation d'équilibre thermodynamique complétée par des expériences sous sollicitations variées telles que celles présentées dans le prochain paragraphe.

3. Cadre expérimental

Les essais expérimentaux de traction et de compression présentés dans ce paragraphe ont été réalisés sur un AMF polycristallin de type Ni₅₀Ti₅₀%at, livré sous forme de tôles de 3.2mm d'épaisseur, laminées à froid (18%) et recuites à basse température (0.5h à 703K). Les températures de transformations mesurées par DSC

¹ REMARQUE. — Dans ce document, les phénomènes irréversibles associés à la transformation martensitique sont volontairement ignorés, l'objectif premier étant de mettre l'accent sur la dissymétrie traction-compression et la localisation de la déformation en traction. Cependant, le schéma constitutif utilisé ici peut naturellement être complété par un formalisme capable de modéliser l'hystérésis observé dans les AMF [FAV 88] [GUE 80] [PEG 88][MAN 93][ORG 97].

sont $M_s = 280\text{K}$, $A_f = 328\text{K}$ et une étude préliminaire a montré que ces tôles pouvaient être considérées comme homogènes et isotropes [ORG 97], [ORG 98.a].

Afin de pouvoir réaliser des essais de compression sur des éprouvettes planes de traction (cf. Figure 3.1), un dispositif anti-flambement a spécialement été développé et validé antérieurement [ORG 95]. Ce dispositif, directement incorporable dans un banc de traction à température variable [MAN 97], est représenté schématiquement sur la Figure 3.2. Lors de la compression de l'éprouvette, il permet d'éviter le flambement dans les deux directions transverses (appuis plans + appui linéique dans la rainure taillée dans l'éprouvette), sans pour autant perturber l'expansion de l'éprouvette selon son épaisseur, grâce aux rondelles Bellevilles.

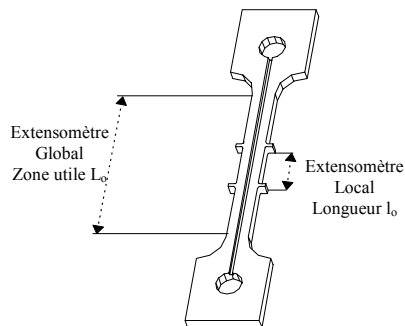


Figure 3.1 : Forme des éprouvettes de traction-compression.

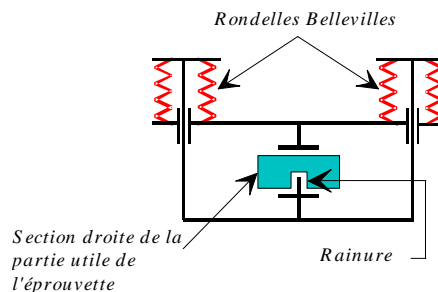


Figure 3.2 : Schéma de principe en coupe transversale du dispositif anti-flambement.

Afin d'étudier le comportement superélastique, des essais de traction et de compression sont réalisés sur le matériau à 333K (température supérieure à A_f) selon le trajet de la Figure 2.1. Les essais de traction et de compression sont représentés sur la Figure 3.3. Une représentation contrainte nominale ($\sigma_o = F/S_o$) - déformation longitudinale déterminée par un extensomètre local ($\varepsilon = \Delta l/l_o$, Figure 3.1) est adoptée. S_o et l_o représentent respectivement les section et longueur initiales. Ces deux essais ont été réalisés sur deux éprouvettes initialement austénitiques, vierges de tout chargement thermomécanique. Le comportement superélastique est observé de manière probante : à partir d'une certaine contrainte, le matériau se déforme par transformation martensitique induite sous contrainte, jusqu'à un certain niveau de déformation de plusieurs % où un raidissement progressif de la courbe contrainte-déformation est observé. De plus, la Figure 3.3 fait apparaître deux résultats importants :

- D'une part, elles montrent une très forte dissymétrie de comportement entre traction et compression. Les niveaux de contrainte pour induire de la martensite en compression sont beaucoup plus importants que ceux nécessaires en traction. Inversement, la déformation de transformation en traction est plus grande que

celle de compression. Il a été montré antérieurement que cette dissymétrie de comportement n'était pas due à un phénomène physique lié à la très faible variation de volume de la transformation martensitique, mais qu'elle était plutôt corrélée à la faible symétrie cristallographique de la phase martensitique, aux phénomènes de démaclage accompagnant la transformation martensitique induite sous contrainte, et aux contraintes locales induites par la structure polycristalline du matériau [PAT 95] [BUC 96] [ORG 97] [ORG 98.a].

- D'autre part, la Figure 3.3 met clairement en évidence au cours de l'essai de traction un plateau horizontal caractéristique d'une localisation de la déformation de type bandes de Lüders. Afin de mettre plus en avant ce phénomène, un extensomètre local (longueur de jauge $l_0 = 10\text{mm}$) et un extensomètre global (longueur de jauge $L_0 = 50\text{mm}$) ont été utilisés simultanément durant un même essai. Les positions respectives de ces deux extensomètres sur l'éprouvette de traction sont schématisées sur la Figure 3.1. L'évolution de la déformation globale ($\Delta L/L_0$) en fonction de la déformation locale ($\Delta l/l_0$) est représentée sur la Figure 3.4.

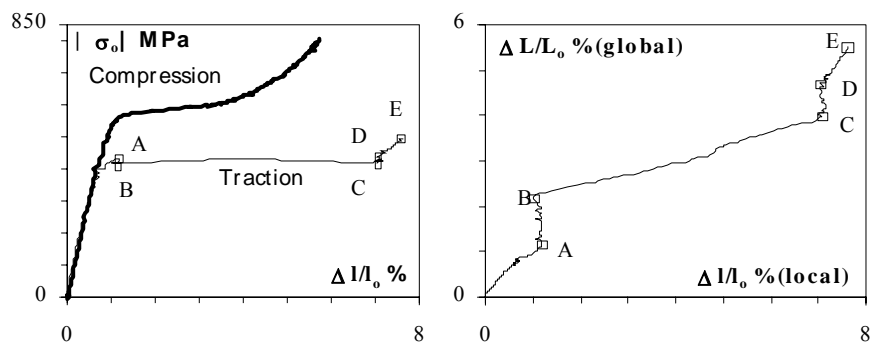


Figure 3.3 : Essais de traction et de compression superélastique réalisés à 333K.

Figure 3.4 : Evolution de la déformation globale en fonction de la déformation locale au cours de la charge OABCDE de la Figure 3.3.

Au début de l'essai (*trajet OA*), la déformation locale est bien égale à la déformation globale. L'état de déformation est homogène dans toute la zone utile de l'éprouvette (Figure 3.1). En A, la déformation locale n'évolue plus. En même temps, la contrainte nominale σ_0 se met à diminuer très légèrement (cf. Figure 3.3). Ces deux observations révèlent le début puis l'évolution de la transformation martensitique dans la zone utile globale, mais en dehors de la zone locale, qui ne se déforme plus (*trajet AB*) : il y a localisation de la transformation hors de la zone de mesure locale. En B, le front de transformation atteint la zone lo-

cale : dans ce domaine, la variation de la mesure locale est supérieure à celle de la mesure globale (*trajet BC*) : il y a localisation de la transformation dans la zone locale. Le long du *trajet CD*, la déformation locale n'évolue plus : la localisation qui a traversé la zone locale se poursuit par ailleurs dans la zone utile globale. A partir de *D*, l'éprouvette se retrouve dans un régime de déformation homogène (*trajet DE*).

La localisation de la déformation au cours d'un essai de traction simple sur un AMF est un phénomène couramment observé [LIU 95][SHA 95][LIU 98]. Par exemple, en caractérisant par un travail expérimental très soigneux le comportement mécanique en traction simple d'un fil NiTi à différentes températures, Shaw et Kyriakides [SHA 95] ont clairement mis en évidence l'avancée d'un front de transformation martensitique local, en plaçant côte à côte quatre extensomètres locaux sur toute la zone utile de l'éprouvette. L'origine de cette localisation est double : les paramètres influants peuvent être intrinsèques au matériau, comme par exemples la densité et la configuration des dislocations, la taille de grain ou la présence de précipités, mais ils sont également étroitement liés à la géométrie de l'échantillon testé (dimensions, tolérances géométriques, état de surface) [XIA 98]. Cette localisation pose des problèmes cruciaux de caractérisation et de modélisation. En effet, dans les zones où le chargement s'effectue de façon hétérogène (*trajet ABCD*) l'état local contrainte - déformation est complexe. Ainsi, l'étude de trajectoires partielles pour étudier par exemple l'hystérésis associé à la transformation martensitique n'est plus du tout envisageable en traction pour ce type de matériau [ORG 98.b].

Les deux problèmes qui viennent d'être soulevés ne doivent pas être négligés dans la démarche de modélisation : le comportement traction-compression est fortement dissymétrique, et l'exploitation de l'essai de traction, au sens d'essai homogène de caractérisation, ne peut se faire que dans une plage restreinte, hors des zones à déformation hétérogène.

4. Cadre théorique et numérique

Le cadre théorique et numérique du travail s'articule autour des lois de comportement d'élastohystérésis [GUE 80][FAV 88][MAN 93][ORG 97] et du code éléments finis *Herezh* [RIO 95]. Une des particularités de ce code de calcul de structures réside dans le fait qu'il résout les problèmes aux limites en grands déplacements et en grandes déformations en utilisant un système de coordonnées matérielles entraînés. Un tel formalisme est donc particulièrement bien adapté pour le calcul de pièces en AMF : ces dernières sont en effet généralement amenées à se déformer sous de grandes amplitudes et pour des déformations locales pouvant atteindre des valeurs de l'ordre de 6 à 8%. Dans ce paragraphe, le formalisme utilisé dans *Herezh* est présenté, tout d'abord la description du mouvement du corps déformable puis la

loi de comportement implantée et utilisée pour modéliser la dissymétrie traction-compression et la localisation en traction du comportement superélastique.

4.1 Description du mouvement du corps déformable

4.1.1 Bases naturelles et réciproques

Pour décrire le mouvement du corps déformable Ω , on considère une carte tridimensionnelle de coordonnées matérielles entraînées fixée à Ω . Au point matériel M correspond ainsi un triplet de coordonnées indépendantes du temps $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Un exemple de choix possible, souvent utilisé dans les descriptions dites Lagrangiennes, est constitué par les coordonnées initiales X^a . Dans *Herezh*, ce choix n'est pas fait puisque ce sont les paramètres de l'élément de référence de la discrétisation éléments finis qui sont pris comme coordonnées θ^i . Ainsi, aux instants t_o et t tels que $t_o < t$, le point matériel M occupe respectivement les positions P et p . Au marquage θ^i sont associés les champs de repères matériels naturels $[M, \vec{G}_i]$ et $[M, \vec{g}_i]$ définis selon :

$$\vec{G}_i(\theta^k, t_o) = \frac{\partial \vec{O}P(\theta^k, t_o)}{\partial \theta^i} \text{ et } \vec{g}_i(\theta^k, t) = \frac{\partial \vec{O}p(\theta^k, t)}{\partial \theta^i} \quad [2]$$

Ces vecteurs de base forment aux instants t_o et t et au point matériel M des bases naturelles entraînées. A ces bases naturelles sont associées des bases réciproques duales $[M, \vec{G}^i]$ définie à t_o et $[M, \vec{g}^i]$ définie à t selon :

$$\vec{G}_i \cdot \vec{G}^j = \delta_i^j \quad \text{et} \quad \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j \quad [3]$$

où δ_i^j représente le symbole de Krönecker.

4.1.2 Tenseur métrique fondamental

Le tenseur métrique fondamental est introduit en considérant deux éléments matériels infinitésimaux arbitraires $\vec{\delta M}$ et \vec{dM} définis au point matériel M . A l'instant t_o , ces éléments matériels définissent les éléments spatiaux $\vec{\delta P}$ et \vec{dP} au point géométrique P dans l'espace affine euclidien E_3 . A l'instant t , ces mêmes éléments matériels définissent les éléments spatiaux $\vec{\delta p}$ et \vec{dp} au point géométrique p . Le produit scalaire de ces deux vecteurs s'écrit :

$$\vec{d}p \cdot \vec{\delta}p = \left(d\theta^i \vec{g}_i \right) \left(\delta\theta^j \vec{g}_j \right) = g_{ij} d\theta^i \delta\theta^j \quad [4]$$

où les g_{ij} sont les composantes covariantes à t du tenseur métrique \mathbf{G} dans $\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$. Ainsi, à l'instant t , le tenseur métrique s'écrit :

$$\mathbf{G} = g_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = g^{kl} \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l = \delta_n^m \vec{g}_m \otimes \vec{g}^n \quad [5]$$

Le produit scalaire défini par l'équation [4] permet par exemple de calculer le carré de la longueur actuelle du segment matériel dM selon :

$$\vec{d}p \cdot \vec{d}p = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad [6]$$

4.1.3 Tenseur des déformations d'Almansi

La définition d'une mesure de la déformation entre deux instants t_0 et t est faite par comparaison à l'instant actuel t du produit scalaire d'éléments infinitésimaux définis en un même point matériel M . En reprenant les grandeurs définies précédemment et en remarquant que le produit scalaire est une grandeur absolue scalaire indépendante du système d'axe, donc naturellement transportable de t_0 à t , il est écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}p \cdot \vec{d}p - \vec{\delta}P \cdot \vec{d}P &= \left(g_{ij}(t) - G_{ij}(t_0) \right) d\theta^i \delta\theta^j \\ &= \left(g_{ij}(t) - \Delta_{t_0}^t G_{ij}(t) \right) d\theta^i \delta\theta^j = 2\Delta_{t_0}^t \varepsilon_{ij}(t) d\theta^i \delta\theta^j \end{aligned} \quad [7]$$

Dans cette équation, $\Delta_{t_0}^t G_{ij}(t) = G_{ij}(t_0)$ représentent les composantes covariantes du tenseur de déformation de Cauchy $\Delta_{t_0}^t \mathbf{G}$ dans $\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ [FAV 88]. Ce tenseur est obtenu par transport deux fois covariant du tenseur métrique \mathbf{G} de l'instant t_0 à l'instant t . $\Delta_{t_0}^t \varepsilon_{ij}$ sont les composantes covariantes dans $\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ du tenseur de déformation d'Almansi $\Delta_{t_0}^t \boldsymbol{\varepsilon}$ défini entre t_0 et t . Sous une forme tensorielle, ce tenseur est écrit selon :

$$\Delta_{t_0}^t \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta_{t_0}^t \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{G} - \Delta_{t_0}^t \mathbf{G} \right] \quad [8]$$

En particulier, si $\vec{\delta}p = \vec{d}p$ et si $\vec{\delta}P = \vec{d}P$, le tenseur d'Almansi permet de calculer la variation du carré des longueurs du segment matériel dM selon :

$$\vec{d}p \cdot \vec{d}p - \vec{d}P \cdot \vec{d}P = \left(g_{ij} - \Delta_{t_0}^t G_{ij} \right) d\theta^i d\theta^j = 2\Delta_{t_0}^t \varepsilon_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad [9]$$

Pour un barreau isotrope soumis à un essai de traction ou compression simple, la composante du tenseur d'Almansi suivant l'axe normé noté y lié au barreau vaut :

$$\Delta_0^t \varepsilon_{yy} = [l^2 - l_o^2] / 2 l^2 \quad [10]$$

si l est la longueur actuelle et l_o la longueur de référence à l'instant $t_o = 0$. Cette déformation tend vers 0.5 lorsque l tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$ si l tend vers 0.

4.1.4 Tenseur des vitesses de déformation

Le tenseur de vitesse de déformation \mathbf{D} à l'instant actuel t est défini à partir du tenseur de déformation d'Almansi selon :

$$\mathbf{D} = D_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = \mathbf{L}_{v..} \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} \quad [11]$$

où $\mathbf{L}_{v..}$ symbolise la dérivée temporelle deux fois covariante de Lie.

4.2 Modélisation du comportement superélastique

4.2.1 Définition d'un schéma hyperélastique

Un point de départ à la modélisation du comportement superélastique des AMF, dans l'hypothèse où les phénomènes à caractère irréversible associés à la transformation martensitique ne sont pas pris en compte, repose sur l'équation thermodynamique [1], ainsi que sur les hypothèses classiquement utilisées en mécanique des milieux continus. D'une part, le travail mécanique dW , par unité d'étendue infinitésimale $d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$, échangé pendant un instant dt par un élément de volume $d\Omega$ avec son environnement, est exprimé à l'instant actuel t en fonction du tenseur des vitesses de déformation \mathbf{D} et du tenseur des contraintes de Cauchy relatif de poids 1 $\boldsymbol{\sigma}$ selon $dW = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$. D'autre part, il est postulé l'existence d'un état neutre ($t_o = 0$ par convention et $\boldsymbol{\sigma}(t_o) = 0$). Dans le cas d'une évolution isotherme, l'équation [1] conduit à définir une densité d'énergie élastique \mathbf{E} par unité d'étendue infinitésimale, fonction d'état qui dans ce cas est la densité d'énergie libre d'Helmoltz [FAV 88]. L'équation [1] est alors réécrite selon :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sigma^{ij} D_{ji} \quad [12]$$

où σ^{ij} sont les composantes contravariantes dans $\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ du tenseur des contraintes de Cauchy relatif de poids 1. \mathbf{E} est à chaque instant fonction d'un certain

nombre de paramètres p_α caractérisant les variations géométriques entre l'état neutre et l'état déformé. Ainsi, il peut être également écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p_\alpha} f_\alpha^{ij} D_{ji} \quad [13]$$

si bien que les composantes contravariantes dans $\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j$ du tenseur des contraintes de Cauchy sont alors déterminées par l'identification :

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial p_\alpha} f_\alpha^{ij} \quad [14]$$

Dans le cas d'un matériau quelconque, les p_α peuvent par exemple être construits à partir du tenseur d'Almansi $\Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon}$ ou du tenseur de déformation de Cauchy ${}^t_0 \mathbf{G}$. Dans le cas d'évolutions isothermes et de matériau isotrope, il suffit de définir \mathbf{E} à partir de trois invariants indépendants du tenseur de déformation. Le choix des invariants est libre, mais il paraît intéressant d'utiliser des invariants se rapprochant de la physique du matériau à modéliser. Dans le cas des AMF, la variation de volume v , l'intensité du déviateur des déformations Q_ε et la phase du déviateur des déformations φ_ε semblent appropriés :

$$Q_\varepsilon = \sqrt{\Delta_0^t \bar{\varepsilon}^i_j \Delta_0^t \bar{\varepsilon}^j_i}; \cos(3\varphi_\varepsilon) = \sqrt{6} \frac{\Delta_0^t \bar{\varepsilon}^i_k \Delta_0^t \bar{\varepsilon}^k_j \Delta_0^t \bar{\varepsilon}^j_i}{Q_\varepsilon^3}; \quad [15]$$

$$\Delta_0^t \bar{\varepsilon}^i_j = \Delta_0^t \varepsilon^i_j - \frac{1}{3} \Delta_0^t \varepsilon^k_k \delta^i_j; \quad v^2 = \det(g_{ij}) / \det({}^t_0 G_{ij})$$

Favier [FAV 88] montre alors que pour un matériau isotrope, si l'on utilise le tenseur de déformation d'Almansi, le tenseur des contraintes peut se mettre sous la forme générale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta_0 \mathbf{G} + \beta_1 \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} + \beta_2 \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} \quad [16]$$

où les β_i sont des grandeurs scalaires définies à partir de la métrique, de la densité d'énergie élastique \mathbf{E} et de ses dérivées par rapport aux invariants.

Pour pouvoir par la suite identifier la loi de comportement hyperélastique avec les essais expérimentaux, on associe à ce formalisme relatif de poids 1 un formalisme absolu, en introduisant le potentiel absolu $E = \mathbf{E} / \sqrt{\det(g_{ij})}$.

L'expression du tenseur des contraintes de Cauchy absolu $\boldsymbol{\Sigma}$ s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\beta}_0 \mathbf{G} + \tilde{\beta}_1 \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\beta}_2 \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i / \sqrt{\det(g_{ij})} \quad [17]$$

Les expressions des $\tilde{\beta}_i$ deviennent alors :

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{\beta}_0 &= E + v \frac{\partial E}{\partial v} + b_Q \frac{\partial E}{\partial Q_\varepsilon} + b_\varphi \frac{\partial E}{\partial \varphi_\varepsilon} \\ \bullet \tilde{\beta}_1 &= c_Q \frac{\partial E}{\partial Q_\varepsilon} + c_\varphi \frac{\partial E}{\partial \varphi_\varepsilon} \\ \bullet \tilde{\beta}_2 &= d_Q \frac{\partial E}{\partial Q_\varepsilon} + d_\varphi \frac{\partial E}{\partial \varphi_\varepsilon} \end{aligned} \quad [18]$$

$$\text{avec, en notant la quantité } J_\varepsilon = 1 - \frac{2I_\varepsilon}{3} = 1 - \frac{2\Delta_0^t \varepsilon^i}{3} :$$

$$\begin{aligned} \bullet b_Q &= -I_\varepsilon / 3Q_\varepsilon \\ \bullet c_Q &= (1 + 2I_\varepsilon / 3) / Q_\varepsilon \\ \bullet d_Q &= -2 / Q_\varepsilon \\ \bullet b_\varphi &= [3Q_\varepsilon \sin(3\varphi_\varepsilon)(2Q_\varepsilon^2 - I_\varepsilon) + 3\sqrt{6}Q_\varepsilon^2(1 - I_\varepsilon) - \sqrt{6}I_\varepsilon^2 J_\varepsilon] / 9Q_\varepsilon^3 \sin(3\varphi_\varepsilon) \\ \bullet c_\varphi &= [Q_\varepsilon \cos(3\varphi_\varepsilon)(3 + 2I_\varepsilon) + \sqrt{6}Q_\varepsilon^2 + 2\sqrt{6}I_\varepsilon J_\varepsilon] / 3Q_\varepsilon^3 \sin(3\varphi_\varepsilon) \\ \bullet d_\varphi &= [-2Q_\varepsilon \cos(3\varphi_\varepsilon) - 2\sqrt{6}J_\varepsilon] / Q_\varepsilon^3 \sin(3\varphi_\varepsilon) \end{aligned} \quad [19]$$

Bien que dans le système d'équations [19] la trace du tenseur des déformations I_ε apparaisse, le potentiel E n'est bien fonction que de v , Q_ε et φ_ε [FAV 88].

4.2.2 Choix d'un potentiel hyperélastique

Le potentiel E implanté dans *Herezh* est choisi de façon à reproduire aux mieux les essais mécaniques isothermes superélastiques. Il s'écrit :

$$E = \begin{cases} \frac{k}{6} \ln^2(v) \\ + \frac{\mu_1 \alpha_1^2}{2} \left[A_1^2 - A_1 \sqrt{1 + A_1^2} + \ln(A_1 + \sqrt{1 + A_1^2}) \right] + Q_{\sigma_o} Q_\varepsilon - \frac{\mu_1 Q_{\varepsilon_s}^2}{2} + E_{10} \\ + \frac{\mu_2 Q_\varepsilon^2}{2} \\ + \frac{\mu_3 \alpha_2^2}{2} \left[A_2 \sqrt{1 + A_2^2} + \ln(A_2 + \sqrt{1 + A_2^2}) \right] + A_{21}(A_{21} - 2A_{20}) \end{cases} + E_{30} \quad [20]$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \bullet E_{10} &= \frac{\mu_1 \alpha_1^2}{2} \left[A_{10} \sqrt{1 + A_{10}^2} + \ln \left(A_{10} + \sqrt{1 + A_{10}^2} \right) \right] & [21] \\
 \bullet E_{30} &= -\frac{\mu_3 \alpha_2^2}{2} \left[A_{20} \sqrt{1 + A_{20}^2} + \ln \left(A_{20} + \sqrt{1 + A_{20}^2} \right) \right] \\
 \bullet Q_{\varepsilon_s} &= \frac{(\mu_1 \alpha_1)^2 - Q_{\sigma_o}^2}{2\mu_1 Q_{\sigma_o}} \\
 \bullet A_1 &= \frac{(Q_{\varepsilon} + Q_{\varepsilon_s})}{\alpha_1} \quad \text{et} \quad A_{10} = \frac{Q_{\varepsilon_s}}{\alpha_1} \\
 \bullet A_2 &= \frac{(Q_{\varepsilon} - Q_{\varepsilon_c})}{\alpha_2} \quad \text{et} \quad A_{20} = \frac{-Q_{\varepsilon_c}}{\alpha_2} \quad \text{et} \quad A_{21} = \frac{Q_{\varepsilon}}{\alpha_2}
 \end{aligned}$$

La réponse que donne le schéma hyperélastique en cisaillement pur est illustrée sur la Figure 4.1, où l'on illustre par la même occasion la signification physique de sept des huit paramètres du modèle : $\mu_1 + \mu_2$ représente le module avant le début de la transformation, α_1 permet la transition entre ce domaine et le domaine de transformation, τ_o (ou $Q_{\sigma_o}/\sqrt{2}$) caractérise la contrainte initiant la transformation, μ_2 est la pente supposée constante pendant le régime de transformation, α_2 relate la transition vers la fin de transformation, γ_c (ou $Q_{\varepsilon_c}\sqrt{2}$) décrit la déformation de transformation maximale en cisaillement, $\mu_3 + \mu_2$ est le module après la fin de la transformation. Le huitième paramètre k de l'équation [20] s'interprète quant à lui comme trois fois la compressibilité de l'AMF.

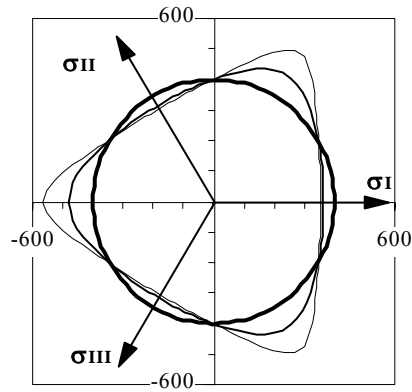
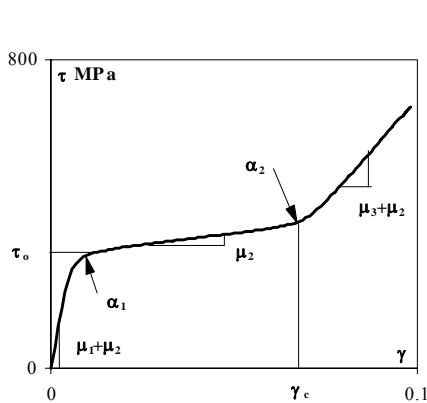


Figure 4.1 : Forme et signification physique

Figure 4.2 : Plan déviatoire de l'espace des

des paramètres du schéma constitutif dans le cas d'un chargement de cisaillement pur. contraintes principales. Prise en compte de la dissymétrie traction-compression de la contrainte de transformation
($n_{\sigma_o} = 0.2$ et $\gamma_{\sigma_o} = 0$, puis 0.6, puis 0.82) -

La dissymétrie traction - compression observée expérimentalement n'est pas due à la variation de volume associée à la transformation martensitique (cf. §3, [PAT 95], [BUC 96], [ORG 97][ORG 98.a]). Par conséquent, elle ne peut être modélisée qu'en faisant intervenir dans l'expression du potentiel E la phase φ_ε du tenseur des déformations. Ceci est réalisé par l'intermédiaire de la contrainte de transformation Q_{σ_o} ainsi que par la déformation de transformation Q_{ε_c} . La dépendance de ces deux grandeurs purement déviatoriques avec la phase du tenseur des déformations est effectuée en adoptant une forme à symétrie ternaire ($2\pi/3$), similaire à celle donnée par Stutz [STU 72] :

$$\begin{aligned} \bullet Q_{\sigma_o}(\varphi_\varepsilon) &= Q_{\sigma_{oo}} \left(1 + \gamma_{\sigma_o} \cos(3\varphi_\varepsilon)\right)^{-n_{\sigma_o}} \\ \bullet Q_{\varepsilon_c}(\varphi_\varepsilon) &= Q_{\varepsilon_{co}} \left(1 - \gamma_{\varepsilon_{co}} \cos(3\varphi_\varepsilon)\right)^{-n_{\varepsilon_{co}}} \end{aligned} \quad [22]$$

Cette modification du potentiel fait apparaître les quatre derniers paramètres du schéma hyperélastique : γ_{σ_o} et n_{σ_o} qui permettent d'avoir une dissymétrie traction-compression sur la contrainte de transformation (cf. Figure 4.2), $\gamma_{\varepsilon_{co}}$ et $n_{\varepsilon_{co}}$ qui font de même pour la déformation de transformation.

5. Résultats Numériques

Ce paragraphe illustre le fruit des développements théoriques du paragraphe précédent, en comparant les résultats donnés par les simulations numériques aux expériences présentées au §3. Dans un premier temps l'accent est mis sur la dissymétrie traction - compression. Ensuite, le problème de la localisation de la déformation en traction est abordé.

5.1 Dissymétrie traction-compression

L'identification de la loi de comportement est effectuée en réalisant des simulations sur un élément hexaédrique linéaire soumis à une cinématique homogène de compression simple. Cette simulation permet de déterminer entre autres les paramètres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha_1, \alpha_2$. Le paramètre k a été déterminé en supposant un coefficient de Poisson de l'AMF de 0.4. Les paramètres qui nécessitent plusieurs essais homogè-

nes pour être identifiés, tels que $Q_{\sigma_{oo}}$, $Q_{\varepsilon_{co}}$, n_{σ_o} , $n_{\varepsilon_{co}}$, γ_{σ_o} et $\gamma_{\varepsilon_{co}}$ ont été déterminés à partir d'essais de traction, compression et de cisaillement non tous présentés ici [ORG 97]. Finalement, les 12 paramètres du schéma hyperélastique sont donnés dans le Tableau 5-1.

k (MPa)	μ_1 (MPa)	μ_2 (MPa)	μ_3 (MPa)
270 000	24 000	245	10 000
$Q_{\sigma_{oo}}$ (MPa)	$Q_{\varepsilon_{co}}$	α_1	α_2
370	0.075	0.001	0.005
n_{σ_o}	γ_{σ_o}	$n_{\varepsilon_{co}}$	$\gamma_{\varepsilon_{co}}$
0.09	0.9	0.2	0.5

Tableau 5-1 : Valeurs des paramètres du schéma hyperélastique.

La Figure 5.1 montre que la réponse du matériau en compression simple est bien reproduite par le présent schéma. La simulation d'une traction simple d'un seul hexaèdre linéaire fait apparaître un plateau de pente positive très faible, mais non négative, comme le montre la Figure 5.2. Enfin, la comparaison des Figure 5.1 et Figure 5.2 montre que la dissymétrie traction - compression est bien prise en compte : les niveaux de contraintes sont plus élevés en compression et la déformation de transformation est plus importante en traction.

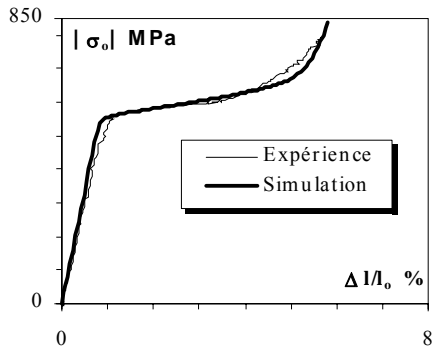


Figure 5.1 : Courbe contrainte-déformation en compression avec le potentiel hyperélastique dont les paramètres sont donnés par le Tableau 5-1..

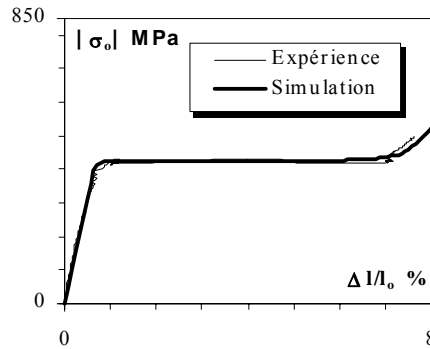


Figure 5.2 : Courbe contrainte-déformation en traction avec le potentiel hyperélastique dont les paramètres sont donnés par le Tableau 5-1.

5.2 Localisation de la déformation en traction

Le dessein de ce paragraphe est d'étudier à partir du schéma hyperélastique établi précédemment le phénomène de localisation de la déformation sur une éprouvette prismatique sollicitée en traction simple.

5.2.1 Position du problème aux limites

Il a été souligné au §3 que le phénomène de localisation de la déformation était induit non seulement par des facteurs intrinsèques au matériau, mais aussi par des facteurs extrinsèques au matériau, comme par exemple la géométrie de l'échantillon [XIA 98]. Les paramètres de la loi de comportement sont désormais figés aux valeurs identifiées du Tableau 5-1. Dès lors, le seul degré de liberté possible pour révéler un tel mode de déformation hétérogène est d'agir sur le caractère extrinsèque de la localisation, à savoir la géométrie de l'échantillon. Ainsi, l'éprouvette "numérique" que l'on se propose d'étudier est supposée contenir un petit défaut géométrique capable d'initier une instabilité. Elle est schématisée sur la Figure 5.3 : ses dimensions initiales sont L_o , b_o et h_o , et l'axe y est l'axe de traction. Le défaut géométrique est généré sur la largeur b_o , choisie comme une fonction sinusoïdale de y :

$$b_o = b_{oo} + \Delta b \sin(\pi y / L) \quad [23]$$

Quantitativement, les dimensions de l'éprouvette sont choisies à : $L_o = 50\text{mm}$, $h_o = 1\text{mm}$, $b_{oo} = 5\text{mm}$. La valeur de Δb est choisie entre 0 et 10^{-1}mm .

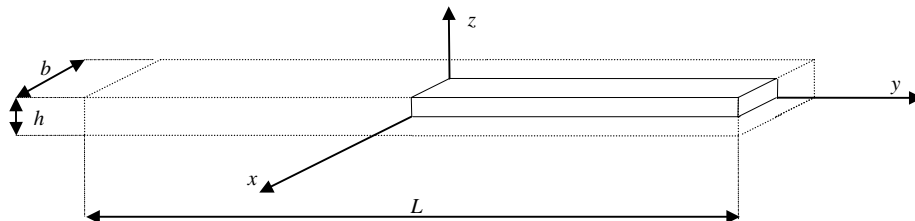


Figure 5.3 : Schématisation de l'éprouvette de traction.

Par raison de symétrie de chargement, seul le huitième de l'éprouvette est modélisé (traits pleins sur la Figure 5.3). Ainsi, sur ce huitième d'éprouvette, les conditions aux limites de la simulation sont :

- pour $y = 0\text{mm}$ $U_y = 0\text{mm}$,
- pour $y = L_o/2$ $U_y = 0.075 L_o$ atteint en 75s avec des incréments de 0.5s.
- pour $x = 0\text{mm}$ $U_x = 0\text{mm}$,
- pour $z = 0\text{mm}$ $U_z = 0\text{mm}$.

U_x , U_y et U_z représentent les composantes du déplacement selon les trois axes.

5.2.2 Influence de la taille du maillage

Une première série de simulations est réalisée en choisissant $\Delta b = 0.01\text{mm}$ et en utilisant différents maillages en hexaèdres linéaires : l'objectif est de voir à partir de quelle finesse de maillage les résultats donnés par les simulations sont suffisamment cohérents. Les maillages envisagés sont de $2 \times 20 \times 2$, $4 \times 40 \times 1$, $4 \times 40 \times 2$, $4 \times 40 \times 4$, $8 \times 80 \times 2$ et $12 \times 120 \times 1$. Il est à remarquer que ces maillages ont été systématiquement choisis pour que les éléments soient carrés dans le plan xy : l'objectif est de minimiser la distorsion initiale des éléments.

A titre d'exemple, le maillage $8 \times 80 \times 2$ est donné sur la Figure 5.4. L'influence de la finesse du maillage est analysée sur la Figure 5.5. L'élément de comparaison entre les différents maillages repose sur les valeurs au cours de la charge de la composante suivant l'axe normé y' de l'éprouvette de traction de la déformation locale d'Almansi $\Delta_0^t \varepsilon_{yy}$ données aux points de coordonnées $(0, 0, 0)$. Il est tracé sur cette figure l'écart relatif sur la valeur $\Delta_0^t \varepsilon_{yy}$ donnée par chacun des maillages par rapport aux résultats donnés par le maillage fin $12 \times 120 \times 1$.

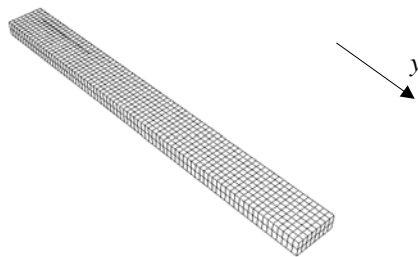


Figure 5.4 : Maillage $8 \times 80 \times 2$ en hexaèdres linéaires.

Les résultats représentés Figure 5.5 conduisent aux conclusions suivantes :

- L'analyse de la finesse du maillage suivant l'axe de l'éprouvette est effectuée en comparant les maillages $2 \times 20 \times 2$, $4 \times 40 \times 2$, $8 \times 80 \times 2$. Ces trois maillages conduisent dans le plan xy à des éléments initialement carrés. On élimine ainsi l'influence de la forme des éléments. La Figure 5.5 montre alors qu'il est nécessaire de disposer d'un nombre d'éléments suffisamment important dans la longueur.
- Les réponses données par les maillages $4 \times 40 \times 1$, $4 \times 40 \times 2$ et $4 \times 40 \times 4$ sont identiques, ce qui montre que le nombre d'éléments sur l'épaisseur influe très peu

sur la valeur de $\Delta_0^t \varepsilon_{yy}$ au point $(0, 0, 0)$. Ce résultat est conforté par la comparaison des maillages $8 \times 80 \times 1$ et $8 \times 80 \times 2$.

- La comparaison des maillages $8 \times 80 \times 2$ (ou $8 \times 80 \times 1$) avec le maillage $12 \times 120 \times 1$ montre qu'il est raisonnable de se limiter à un maillage 8×80 dans le plan xy .

Au vu des résultats obtenus dans cette étude préliminaire, il apparaît que le maillage $8 \times 80 \times 1$ permet de décrire correctement l'état de déformation de l'éprouvette de traction, tout en minimisant les temps de calculs : il sera utilisé par la suite.

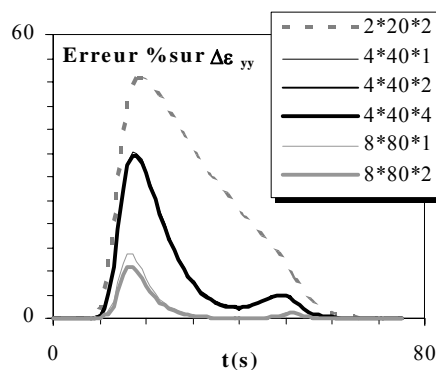


Figure 5.5 : Erreur commise sur la déformation longitudinale $\Delta_0^t \varepsilon_{yy}$ au point $(0, 0, 0)$ par rapport au maillage $12 \times 120 \times 1$.

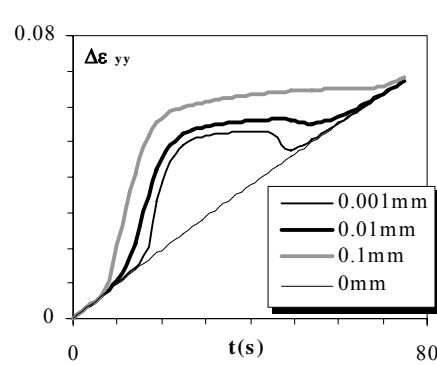


Figure 5.6 : Influence de la valeur du défaut géométrique sur la localisation : évolution de la déformation longitudinale au point de coordonnées $(0, 0, 0)$.

5.2.3 Influence du défaut géométrique

Afin d'étudier l'influence du défaut géométrique Δb sur la réponse de l'éprouvette, quatre simulations ont été effectuées sur le maillage $8 \times 80 \times 1$ pour des valeurs de Δb égales à 0 , 10^{-3} , 10^{-2} et 10^{-1} mm.

Les résultats présentés sur la Figure 5.6, montrent que la déformation se localise pour toute valeur de Δb non nulle [PEG 88] : bien que le déplacement imposé à la structure soit une fonction linéaire du temps, la déformation longitudinale locale ne suit cette tendance que si $\Delta b = 0$ mm.

La taille du défaut a une première influence sur les temps de début et de fin de localisation. La diminution de cette taille retarde l'apparition de la localisation et avance le retour à une déformation homogène. Ainsi, la déformation longitudinale au point $(0, 0, 0)$ de l'éprouvette qui contient un défaut de 0.1 mm s'éloigne de la linéarité vers 5 s pour ne retrouver un régime de déformation homogène que vers

70s, alors que le même phénomène est compris entre 20 et 50s pour l'éprouvette ayant le plus petit défaut géométrique. La taille du défaut a une seconde influence sur les valeurs de déformation locale obtenues lors de la localisation. Typiquement, l'amplitude de la déformation locale pendant laquelle la localisation se produit est de 6% pour un défaut de 10^{-1} mm alors qu'elle n'est que de 3.5% pour un défaut de 10^{-3} mm.

Par la suite, nous utiliserons une valeur de Δb représentative de l'imprécision dimensionnelle induite par le procédé d'usinage de l'éprouvette, soit $\Delta b = 10^{-2}$ mm.

5.2.4 Analyse détaillée des résultats

La Figure 5.7 représente la déformée du huitième d'éprouvette au cours du chargement pour des temps de 20, 30, 40, 50, et 60s. La déformation $\Delta L/L_0$ en fin de chargement est de 7.5%, ce qui est supérieur à la déformation critique observée expérimentalement (Figure 3.3) associée au plateau de Lüders. La Figure 5.7 montre de façon probante qu'une striction se produit et se propage le long de l'éprouvette. La Figure 5.8 et la Figure 5.9 donnent respectivement les isovaleurs de la contrainte de Cauchy Σ_{yy} et de la déformation d'Almansi $\Delta_0^t \varepsilon_{yy}$ suivant l'axe de traction pour le temps $t = 40$ s. L'état contrainte - déformation n'est pas du tout homogène le long de l'éprouvette puisque de forts gradients sont observés au voisinage du front de localisation :

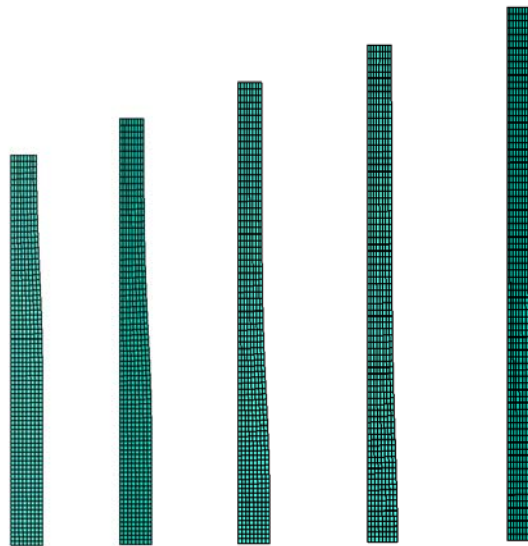


Figure 5.7 : Evolution de la déformée (amplifiée d'un facteur 10) du quart d'éprouvette au cours du chargement pour $t = 20, 30, 40, 50, \text{ et } 60$ s, respectivement de gauche à droite.

- Les isovaleurs de la contrainte Σ_{yy} montrent qu'une partie de l'éprouvette (zone 1 sur la Figure 5.8) se décharge dans la direction y après le passage du front de localisation (zone 2). Au voisinage du front de localisation, l'état de contraintes est fortement perturbé.
- Les déformations longitudinales sont également hétérogènes : elles s'étalent entre 1 et 5.5% le long du huitième de l'éprouvette alors que la déformation globale de traction est de 4.285%.

Comme cela a déjà été remarqué expérimentalement, les résultats numériques ainsi présentés montrent que dès qu'une localisation s'installe au cours du chargement, l'essai de traction ne peut plus être utilisé en tant qu'essai homogène de caractérisation pour ce genre de matériau.

La Figure 5.10 souligne cette dernière observation, en traçant l'évolution au cours du temps de la contrainte de Cauchy Σ_{yy} pour des points de coordonnées (0,0,1), (0,12.5,1), (0,25,1) ; la Figure 5.11 est elle tracée aux points (2.5,0,0), (2.5,12.5,0) et (2.5,25,0). Sur ces deux figures, il apparaît clairement que la contrainte dans la direction de traction n'est pas uniforme. Cette non-uniformité est observée le long de l'axe de l'éprouvette, sur chacune des Figure 5.10 et Figure 5.11. De plus, la comparaison des courbes obtenues pour les couples de points ayant même ordonnée sur l'axe y de l'éprouvette (point (0,0,1) avec point (2.5,0,0), puis point (0,12.5,1) avec point (2.5,12.5,0), puis point (0,25,1) avec point (2.5,25,0)) montre clairement que lorsque la localisation apparaît dans une section, l'état de contrainte n'est plus uniforme dans cette section. En fait, l'observation des autres composantes du tenseur des contraintes, non représentées ici, indiquent que lors du passage du front de localisation, l'état de contrainte n'est plus uniaxial.

La Figure 5.12 analyse plus précisément l'évolution au cours du chargement de l'intensité du déviateur des déformations Q_ϵ (défini en [15]), pour les points $P_1(0,0,0)$, $P_2(0,12.5,0)$ et $P_3(0,25,0)$. La Figure 5.13 représente quant à elle l'évolution du déviateur des contraintes Q_σ relevée aux mêmes points. Ces deux figures montrent bien qu'à un instant donné les différents points ne sont pas soumis aux mêmes conditions de chargement :

- Jusqu'en t_1 , l'état de déformation est homogène dans toute la structure, car les trois valeurs de la déformation longitudinale sont identiques. L'état de contrainte est uniforme, de traction, et la contrainte de traction augmente quasi-linéairement : à ce stade, la transformation martensitique n'a pas débuté dans l'éprouvette (la contrainte du schéma hyperélastique n'a pas encore atteint le seuil Q_{σ_0}).
- Entre t_1 et t_2 : la transformation commence à se produire au voisinage de P_1 , ce qui entraîne : $Q_\epsilon(P_1) > Q_\epsilon(P_2) > Q_\epsilon(P_3)$.

- Entre t_2 et t_3 : la transformation se poursuit et se propage très rapidement au voisinage de P_1 , alors qu'en P_2 et P_3 une décharge en déformation se produit et la contrainte se stabilise à une valeur constante : c'est le début de la localisation de la déformation qui se cantonne à une zone limitée de l'éprouvette (cf. Figure 5.7 à $t = 20s$).

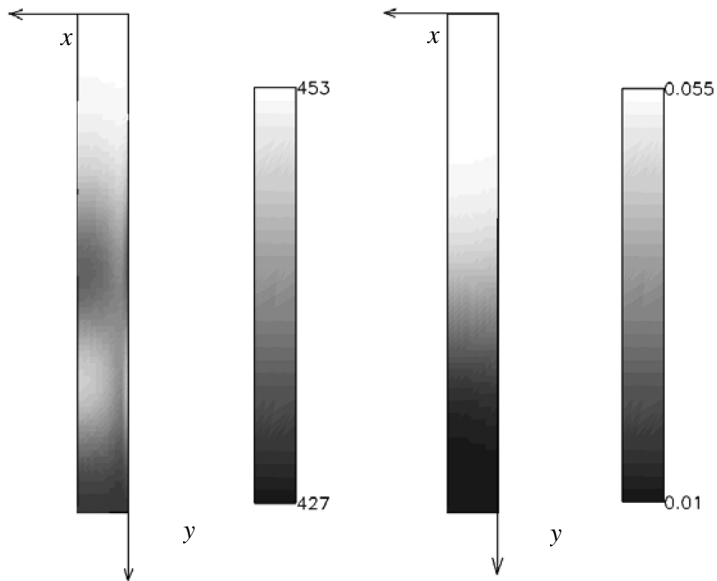


Figure 5.8 : Isovaleurs (en MPa) dans le plan de l'éprouvette $z = 1\text{mm}$ de la contrainte de Cauchy suivant l'axe y à $t = 40s$.

Figure 5.9 : Isovaleurs dans le plan de l'éprouvette $z = 1\text{mm}$ de la déformation d'Almansi suivant l'axe y à $t = 40s$.

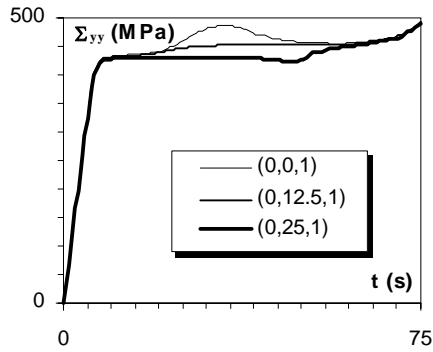


Figure 5.10 : Evolution de la contrainte de contrainte de Cauchy Σ_{yy} pour des points de coordonnées (0,0,1), (0,12.5,1) et (0,25,1).s.

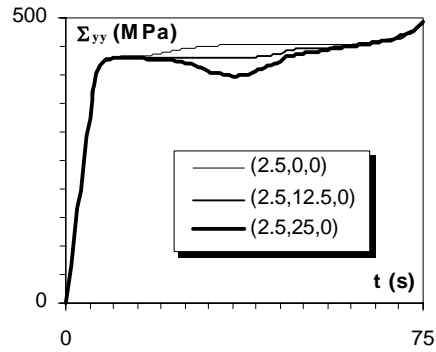


Figure 5.11 : Même figure mais pour des points de coordonnées (2.5,0,1), (2.5,12.5,1) et (2.5,25,1).

- En t_3 , la déformation au niveau de P_1 cesse d'augmenter : l'état de déformation pour le voisinage de ce point a atteint la déformation critique de transformation $Q_{\epsilon_{co}}$. Ainsi, la localisation va cesser au voisinage de P_1 pour se propager à un autre endroit de l'éprouvette.
- Entre t_3 et t_4 la localisation de la déformation a atteint le voisinage de P_2 (cf. Figure 5.7 à $t = 30s$ et $40s$).
- Entre t_4 et t_5 , le front de localisation atteint le voisinage de P_3 : $Q_{\delta}(P_3)$ augmente rapidement et des décharges sont observées pour les points P_1 et P_2 .
- Au delà de t_5 , les trois valeurs de la déformation redeviennent identiques si bien qu'un régime de déformation homogène est enregistré (exemple de la Figure 5.7 à $t = 60s$).

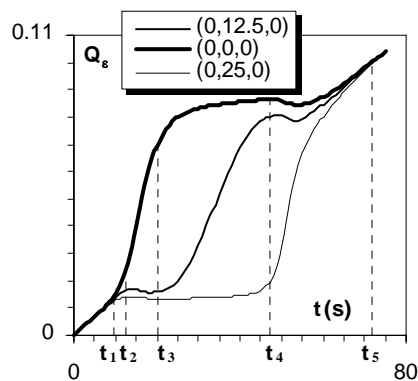


Figure 5.12 : Evolution au cours du temps de

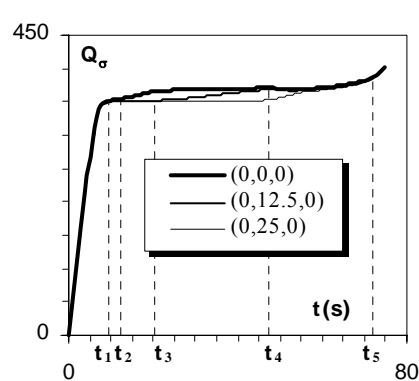


Figure 5.13 : Evolution au cours du temps de

l'intensité du déviateur des déformations pour des points de coordonnées (0,0,0), (0,12.5,0) et (0,25,0).

l'intensité du déviateur des contraintes au mêmes points que la Figure 5.12.

Afin de vérifier la cohérence de l'étude menée dans ce paragraphe, il convient de comparer les résultats de la simulation avec les expériences présentées au §3. C'est ce qui est réalisé sur la Figure 5.14 et la Figure 5.15. Sur la première figure, la courbe expérimentale obtenue par mesures globale et locale de la déformation longitudinale, est celle qui est représentée sur la Figure 3.4. Dans le cas de la simulation, une démarche identique est entreprise pour tracer la courbe en gras de la Figure 5.14 : la mesure locale de la déformation s'effectue à partir des déplacements longitudinaux des points $P_4(0,10\text{mm},0)$ et $P_5(0,17.5\text{mm},0)$, alors que la mesure globale est réalisée à partir du déplacement longitudinal du point P_3 . Ainsi, la déformation locale conventionnelle vaut $[U_y(P_5)-U_y(P_4)]/|P_4P_5|$ et la déformation globale est calculée selon $U_y(P_3)/|OP_3|$:

- La Figure 5.14 montre que qualitativement les phénomènes observés expérimentalement sont très bien reproduits par la simulation. Ceci renforce l'idée émise au §3 : lorsque la courbe de traction du matériau présente un plateau horizontal associé à un mode de déformation inhomogène (entre les instants t_1 et t_5), l'étude du comportement mécanique des AMF en traction n'est pas significative.
- La Figure 5.15 compare la courbe expérimentale de traction de la Figure 3.3 avec les résultats donnés par la simulation. Là encore, la réponse simulée est en très bon accord avec l'expérience.
- Quantitativement, aucune analyse plus poussée ne peut être entreprise : la géométrie des éprouvettes de traction " expérimentales " et " numériques " sont différentes, et le défaut géométrique " expérimental " n'est certainement pas d'une forme sinusoïdale.

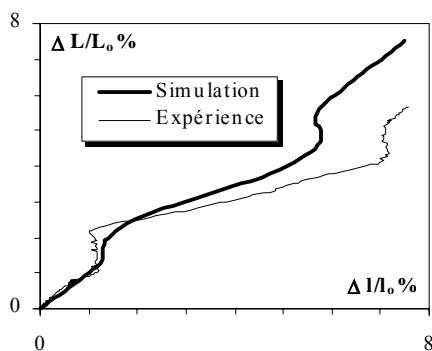


Figure 5.14 : Comparaison expérience - simulation en suivant au cours du charge-

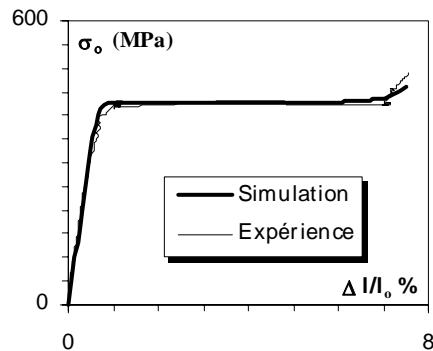


Figure 5.15 : Courbes de traction expérimentale et simulée. Graphe contrainte nominale -

ment les mesures locale ($l_o = 7.5\text{mm}$, LM) et déformation conventionnelle longitudinale globale ($L_o = 25\text{mm}$, GM) de la déformation.

6. Conclusion

A partir de considérations microstructurales, thermodynamiques et expérimentales, un schéma hyperélastique a été développé et implanté dans un code de calculs de structures de type éléments finis - grandes transformations pour modéliser le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme. Ce formalisme, décrit en utilisant la notion de repères matériels entraînés, est capable de modéliser le phénomène physique de transformation martensitique induite sous contrainte. En particulier, il permet de rendre compte d'une dissymétrie traction-compression, très fréquemment observée expérimentalement : cette dissymétrie est transcrite dans le schéma en faisant intervenir la phase du tenseur des déformations d'Almansi.

Pour valider l'approche décrite dans ce document, un exemple de calcul de structure hétérogène a été abordé, en modélisant le phénomène de localisation de la déformation en traction. Dans ce phénomène, les déformations locales atteignent des valeurs de 6 à 8%, ce qui justifie l'utilisation d'un formalisme grandes déformations. Bien qu'un tel calcul soit très sensible à la finesse du maillage utilisé, les résultats numériques obtenus ont montré une bonne corrélation avec l'expérience. En particulier, ils ont souligné une nouvelle fois les faiblesses de l'essai de traction simple, traditionnellement utilisé en tant qu'essai homogène dans la démarche de caractérisation expérimentale du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme.

7. Bibliographie

[ADL 90] ADLER P.H., YU W., PELTON A.R., ZADNO R., DUERIG T.W., BARRESI R., "On the tensile and torsional properties of pseudoelastic NiTi", *Scripta. Metall. Mat.*, vol. 24, p. 943, 1990.

[BUC 96] BUCHHEIT T.E., WERT J.A., "Predicting the orientation-dependent stress-induced transformation and detwinning response of SMA single crystals", *Met. Trans. A*, vol. 27, p. 269, 1996.

[COH 79] COHEN M. OLSON G.B., CLAPP P.C., "On the classification of displacive phase transformations", *Proceedings of ICOMAT 79, Cambridge, Massachusetts, USA*, p. 1, 1979.

- [FAV 88] FAVIER D., Contribution à l'étude théorique de l'élastohystérésis à température variable, Thèse d'état, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1988.
- [GUE 80] GUELIN P., "Remarques sur l'hystérésis mécanique - Les bases d'un schéma thermomécanique à structure héréditaire", *J. de Mécanique*, vol. 19, n° 2, p. 217, 1980.
- [LIU 95] LIU Y., FAVIER D., ORGÉAS L., "Influence of elastic energy on the unloading behaviour of NiTi SMA", *J. de Phys. IV*, vol. 5, C8, p. 593, 1995.
- [LIU 98] LIU Yinong, LIU Yong, VAN HUMBEECK J., "Lüders-like deformation associated with martensite reorientation in NiTi", accepté pour publication dans *Scripta Mat.*, 1998.
- [MAN 93] Manach P.Y., Etude du comportement thermomécanique d'alliages à mémoire de forme NiTi, Thèse de doctorat, Institut Nat. Polytechnique de Grenoble, France, 1993.
- [MAN 97] MANACH P.Y., FAVIER D., "Shear and tensile thermomechanical behavior of a near equiatomic NiTi alloy", *Mat. Sci. Engng. A*, A222, p. 45, 1997.
- [ORG 95] ORGÉAS L., FAVIER D., "Non-symmetric tension-compression behaviour of NiTi alloy", *J. de Phys. IV*, vol. 5, C8, p. 605, 1995.
- [ORG 97] ORGEAS L., Etude expérimentale et numérique du comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme NiTi industriel, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I, Grenoble, France, 1997.
- [ORG 98.a] ORGÉAS L., FAVIER D., "Strees-induced Martensitic ransformation of a NiTi alloy in Shear, Tension and Compression : Isothermal Behaviour", en révision pour publication dans *Acta Mat and Met*, 1998.
- [ORG 98.b] ORGÉAS L., LIU Yinong, FAVIER D., "Experimental study of Mechanical Hysteresis of NiTi during ferroelastic and superelastic deformation", accepté pour publication, *J. de Phys.*, 1998.
- [PAT 95] PATOOR E., EL AMRANI M., EBERHARDT A., BERVEILLER M., "Determination of the origin for the dissymmetry observed between tension and compression test on SMA", *J. de Phys IV*, vol. 5, C8, p. 495, 1995.
- [PEG 88] PEGON P., Etude de l'hystérésis élastoplastique, Thèse d'état, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1988.
- [RIO 95] RIO G., MANACH P.Y., FAVIER D., "Finite element simulation of 3D mechanical behaviour of NiTi shape memory alloys", *Arch. Mech.*, vol. 47, n° 3, p. 537, 1995.

- [ROU 93] ROUMAGNAC P., Etude du comportement en phase martensitique de l'effet mémoire simple d'AMF NiTi en fonction du mode de sollicitation, Thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, Compiègne, France, 1993.
- [SHA 95] SHAW J.A., KYRIAKIDES S., " Thermomechanical aspects of NiTi ", *J. Mec. Phys. Solids*, vol. 43, n° 8, p. 1243, 1995.
- [STU 72] STUTZ P., Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents, Thèse d'état, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, France, 1972.
- [VAC 91] VACHER P., Etude du comportement pseudoélastique d'AMF CuAlZn polycristallins, Thèse de doctorat, Université de Franche Comté, Besançon, France, 1991.
- [WAS 71] WASILEWSKI R.J., " The effects of applied stress on the martensitic transformation in TiNi ", *Metall. Trans. A*, vol. 2, p. 2973, 1971.
- [XIA 98] Xiang H., Liu Yinong, Bataillard L., " Effect of Specimen Geometry on the pseudoelastic Behaviour of NiTi ", en soumission dans *Metall and Mat. Trans.*, 1998.